## Сложение и умножение на скаляр

Для матриц одного и того же размера можно определить операцию сложения. *Суммой матриц* $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ называется матрица, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц-слагаемых $A_{ij}+B_{ij}$. Очевидно, в результате сложения получается матрица того же размера $M \times N$, что и матрицы-слагаемые.

Для матриц любого размера определена операция умножения на скаляр. Результатом умножения матрицы $\mathbf{A}$ на скаляр $\lambda$ является матрица $\lambda\mathbf{A}$ того же размера, элементы которой равны $\lambda A_{ij}$.

Как легко убедиться, для векторов были сформулированы точно такие же правила сложения и умножения на скаляр *(см. главу 1)*, что и неудивительно, т.к. векторы являются частными случаями матриц, и для них должны оставаться справедливыми более общие правила, введенные нами для матриц произвольного размера.

Некоторые примеры сложения матриц и умножения их на скаляр приведены ниже.

**Пример 2.6. Сложение двух матриц**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 4.1 & 5.2 & 6.3 \end{pmatrix}$$

**Пример 2.7. Умножение матрицы на скаляр**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot 100 = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 300 \\ 400 & 500 & 600 \end{pmatrix}$$

**Пример 2.8. Вычисление матричного выражения**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot 5 + \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot 10 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 25 & 31 & 37 \end{pmatrix} \blacksquare$$

Очевидно, что умножение матрицы на скалярный нуль дает нулевую матрицу, а сложение произвольной матрицы $\mathbf{A}$ с нулевой матрицей того же размера дает в результате ту же матрицу $\mathbf{A}$.

## Транспонирование

Матрицей, *транспонированной* по отношению к матрице **A** с элементами $A_{ij}$, называют матрицу с элементами $A_{ji}$. Иными словами, операция транспонирования по матрицы **A** сводится к тому, что строки исходной матрицы становятся столбцами транспонированной, а столбцы – строками (пример 2.9). В результате, если исходная матрица имела размер MxN, то транспонированная будет иметь размер NxM. В частности, транспонирование вектора-столбца Nx1 дает вектор-строку размером 1xN, а транспонирование вектора-строки дает вектор-столбец соответствующего размера (последняя строка примера 2.9).

Операцию транспонирования обозначают путем добавления верхнего индекса в виде литеры «T»: $\mathbf{A}^T$. Несложно убедиться в том, что $(\mathbf{A}^T)^T=\mathbf{A}$.

**Пример 2.9. Транспонирование матрицы и вектора**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

## Произведение матриц

Для двух матриц **A** и **B** размером KxM и MxN соответственно определена операция умножения. Произведением матриц **A·B** называется матрица размера KxN, элементы которой равны следующим суммам:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1M} \\ & \cdots & \\ A_{K1} & \cdots & A_{KM} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1N} \\ & \cdots & \\ B_{M1} & \cdots & B_{MN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + \ldots + A_{1M}B_{M1} & \cdots & A_{11}B_{1N} + \ldots + A_{1M}B_{MN} \\ & \cdots & \\ A_{K1}B_{11} + \ldots + A_{KM}B_{M1} & \cdots & A_{K1}B_{1N} + \ldots + A_{KM}B_{MN} \end{pmatrix}$$

Правило умножения матриц, таким образом, заключается в том, что (i,j)-й элемент матрицы произведения получается в результате суммирования произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы-первого сомножителя и j-го столбца второго сомножителя. Это правило иллюстрируется примером 2.10, в начале которого (символьным образом, чтобы читателю была ясна структура результата) перемножаются матрицы размера 2x3 и 3x3. В последней строке примера 2.10 рассчитывается произведение двух конкретных матриц 2x3 и 3x4. Результатом умножения является, согласно приведенному правилу, матрица 2x4.

***Внимание!***
Как убедительно демонстрирует пример 2.10, для произведения матриц не выполняется сочетательный закон, т.е. **A·B≠B·A**. Он не выполняется даже для квадратных матриц (пример 2.11). Для несоответствующих по размеру матриц процедура умножения не определена вовсе.

**Пример 2.10. Умножение матриц (помните, что A·B≠B·A)**

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ d & f & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2\cdot x + 4\cdot y + 6\cdot z & 3\cdot x + 5\cdot y + 7\cdot z \\ 2\cdot d + 4\cdot f + 6\cdot g & 3\cdot d + 5\cdot f + 7\cdot g \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y & z \\ d & f & g \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2\cdot x + 3\cdot d & 2\cdot y + 3\cdot f & 2\cdot z + 3\cdot g \\ 4\cdot x + 5\cdot d & 4\cdot y + 5\cdot f & 4\cdot z + 5\cdot g \\ 6\cdot x + 7\cdot d & 6\cdot y + 7\cdot f & 6\cdot z + 7\cdot g \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76 & 88 & 100 & 112 \\ 91 & 106 & 121 & 136 \end{pmatrix}$$

**Пример 2.11. Умножение квадратных матриц (помните, что A·B≠B·A)**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 26 & 26 & 26 \\ 44 & 44 & 44 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 18 & 24 & 30 \\ 27 & 36 & 45 \end{pmatrix}$$

Поскольку векторы по определению являются матрицами, то их также можно перемножать между собой, памятуя о необходимости соответствия размеров векторов-сомножителей. В частности, можно умножить вектор-столбец `Nx1` на вектор-строку `1xN`, или, наоборот, вектор-строку `1xN` – на вектор-столбец `Nx1`. Результатом умножения будет матрица – в первом случае размера `NxN`, а во втором – `1x1` (пример 2.12). Полезно сравнить результат умножения вектора-строки на вектор-столбец со скалярным произведением двух соответствующих векторов (последняя строка листинга в примере 2.12). Обратите внимание, что в случае матричного перемножения строки на столбец получается матрица размером `1x1`, а в случае применения операции скалярного произведения векторов – обычное число (скаляр).

**Пример 2.12. Умножение векторов и их скалярное произведение**

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 & 20 \\ 6 & 12 & 18 & 24 \\ 7 & 14 & 21 & 28 \\ 8 & 16 & 24 & 32 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = 70$$

Легко показать, что для скалярного произведения двух векторов $(\mathbf{Ax},\mathbf{y})$ выполняется тождество $(\mathbf{Ax},\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y})$.