

Угол между векторами

Очевидно, неравенство Буняковского можно записать в виде точного равенства, снимая к тому же знак модуля скалярного произведения в левой части: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda \cdot |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$. Скаляр λ является некоторым числом, лежащем в диапазоне $-1 \leq \lambda \leq 1$, и поэтому представимом в виде $\lambda = \cos(\alpha)$, где α – некоторый угол, причем $-\pi \leq \alpha \leq \pi$. Благодаря этому, неравенство Буняковского представимо в эквивалентном виде:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \cdot \cos(\alpha).$$

Угол α называется *углом между векторами \mathbf{x} и \mathbf{y}* . Подчеркнем, что понятие угла между векторами справедливо не только для случая пространств \mathbf{R}_2 и \mathbf{R}_3 , допускающего наглядную геометрическую интерпретацию, но и для векторов пространства \mathbf{R}_n произвольной размерности, когда такая интерпретация невозможна (или почти невозможна). Два вектора, скалярное произведение между которыми равно нулю (или, что то же самое, угол между которыми равен нулю), называются *ортогональными*.

Пример 1.7 демонстрирует вычисление угла между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} , которые были определены ранее в примере 1.4.

Пример 1.7. Угол между векторами (продолжение примера 1.4)

$$\alpha := \arccos \left[\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{(|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|)} \right] \quad \alpha = 0.416$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 80$$

$$|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\alpha) = 80$$

Угол между векторами: геометрия

Можно определить с точки зрения геометрии скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , как скаляр, равный $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\alpha)$, где α представляет собой угол между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} .

Замечание

Как следует из элементарной геометрии, два неколлинеарных вектора в пространстве (т.е. две непараллельные прямые) определяют некоторую плоскость. Один (меньший) угол, образованный этими прямыми и называют углом между векторами. Если векторы коллинеарны, то угол между ними равен нулю.