Свойства векторов

Пространства, о которых мы начали говорить в предыдущем разделе, называются *линейными*, благодаря свойствам сложения его элементов – векторов. Прежде, чем перечислить эти свойства, введем (аксиоматически) некоторые определения.

Определения сложения векторов

- *суммой* векторов **x** и **y** называется вектор $(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$;
- *разностью* векторов **x** и **y** называется вектор $(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = (x_1-y_1, x_2-y_2, \ldots, x_n-y_n)$;
- *произведением* вектора **x** и скаляра α называется вектор $\alpha\cdot\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$;
- *противоположным* по отношению к вектору **x** называется вектор $-\mathbf{x} = (-1)\cdot\mathbf{x}$;
- *нулевым* вектором (или, просто, *нуль-вектором*) называется вектор $\mathbf{0}=(0, \ldots, 0)$.

Свойства сложения векторов

Пользуясь введенными определениями, несложно убедиться в справедливости следующих правил:

- $(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = (\mathbf{y}+\mathbf{x})$ (свойство *переместительности*);
- $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ (свойство *сочетательности*: векторные слагаемые можно группировать любым образом);
- $(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{x}+(-1)\cdot\mathbf{y}$; (разность векторов равна сумме одного вектора и вектора, противоположного другому);
- $\alpha\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha\cdot\mathbf{x}+\alpha\cdot\mathbf{y}$ (свойство *распределительности* по отношению к векторам);
- $(\alpha+\beta)\cdot\mathbf{x} = \alpha\cdot\mathbf{x}+\beta\cdot\mathbf{x}$ (свойство *распределительности* по отношению к скалярам);
- $\alpha\cdot(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\cdot\mathbf{x}$ (свойство *сочетательности* при умножении на скаляр);
- $\mathbf{x}+(-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (сумма противоположных векторов равна нуль-вектору);
- $0\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (произведение вектора на нуль равно нуль-вектору);
- $1\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}$ (произведение вектора на единицу равно самому вектору);

В математике множество объектов любой природы (не обязательно пространство векторов, с которым мы имеем дело) называется *линейным пространством*, если для его объектов **x,y,z** выполняются перечисленные девять правил сложения и умножения на скаляр. Поскольку введенные нами понятия векторов из $\mathbf{R_n}$, а также определения их сложения и умножения на скаляр приводят к выполнению данных правил, то действительное пространство $\mathbf{R_n}$ является *линейным* пространством и обладает всеми свойствами, выводимыми в теории линейных пространств. В частности, различные теоремы, касающиеся линейных пространств вообще (один из примеров приведен в конце разд. 1.1.3), в полной мере применимы к объекту исследования линейной алгебры – пространству $\mathbf{R_n}$.

В заключение приведем конкретный пример, иллюстрирующий свойства сложения векторов (для пространства $\mathbf{R_3}$). В первой строке листинга определяются три вектора из $\mathbf{R_3}$: **x,y,z**, а каждая последующая строка демонстрирует справедливость соответствующего правила действий над векторами, которые были перечислены выше.

Пример 1.2. Свойства векторов

$$x := \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \quad z := \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$$

$$x + y = \begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix} \quad y + x = \begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix}$$

$$(x + y) + z = \begin{pmatrix}12\\15\\18\end{pmatrix} \quad x + (y + z) = \begin{pmatrix}12\\15\\18\end{pmatrix} \quad x + y + z = \begin{pmatrix}12\\15\\18\end{pmatrix}$$

$$x - y = \begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix} \quad x + (-1)\cdot y = \begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}$$

$$\alpha\cdot x + \alpha\cdot y \to \begin{pmatrix}5\cdot\alpha\\7\cdot\alpha\\9\cdot\alpha\end{pmatrix} \quad \alpha\cdot(x + y) \to \begin{pmatrix}5\cdot\alpha\\7\cdot\alpha\\9\cdot\alpha\end{pmatrix}$$

$$(\alpha + \beta)\cdot x \to \begin{pmatrix}\alpha + \beta\\2\cdot\alpha + 2\cdot\beta\\3\cdot\alpha + 3\cdot\beta\end{pmatrix} \quad \alpha\cdot x + \beta\cdot x \to \begin{pmatrix}\alpha + \beta\\2\cdot\alpha + 2\cdot\beta\\3\cdot\alpha + 3\cdot\beta\end{pmatrix}$$

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot x \to \begin{pmatrix}\alpha\cdot\beta\\2\cdot\alpha\cdot\beta\\3\cdot\alpha\cdot\beta\end{pmatrix} \quad \alpha\cdot(\beta\cdot x) \to \begin{pmatrix}\alpha\cdot\beta\\2\cdot\alpha\cdot\beta\\3\cdot\alpha\cdot\beta\end{pmatrix} \quad \alpha\cdot\beta\cdot x \to \begin{pmatrix}\alpha\cdot\beta\\2\cdot\alpha\cdot\beta\\3\cdot\alpha\cdot\beta\end{pmatrix}$$

$$x + (-x) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad 0\cdot x = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad 1\cdot x = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$