

## §8. О нелинейных задачах

До сих пор мы имели дело либо с линейными, либо с такими нелинейными задачами, для которых были применимы схемы «бегущего счета». В ряде нелинейных задач организовать «бегущий счет» невозможно, и разностная аппроксимация уравнений на сетке приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений.

Один из подходов к реализации разностной схемы для нелинейных уравнений состоит в их линеаризации. Его основная идея была рассмотрена, применительно к краевым задачам для ОДУ, на примере задачи взаимодействия световых пучков. Она заключается в сведении нелинейной системы к серии линейных систем. В случае уравнений в частных производных принципиальных отличий, как правило, не возникает.

Поэтому мы разберем несколько иной подход, который заключается в непосредственном решении системы нелинейных уравнений при помощи итерационного алгоритма.

### *Пример: Стационарное обтекание*

Вычислительная гидродинамика – одна из наиболее сложных, но между тем и одна из наиболее продвинутых областей математического моделирования, проводимого путём численного решения нелинейных уравнений в частных производных. Спектр практического применения подобных моделей чрезвычайно широк – от расчётов аэродинамики автомобилей и самолётов до моделирования динамики атмосферы и океана. На сегодняшний день быстрдействие компьютеров и разработанные численные методы позволяют решать систему уравнений гидродинамики с учётом реальной 3D-геометрии практически любой задачи без каких-либо серьёзных ограничивающих предположений. (Разумеется, говоря это, надо помнить, что удовлетворительная теория возникновения турбулентности на сегодня отсутствует.)

Предлагаемый пример взят из книги С.Кунина [4] и связан со сравнительно простой гидродинамической задачей двумерного стационарного обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью. Физически задача соответствует воздействию на стационарный поток жидкости (со скоростью  $V^0$ ) находящегося в нём протяжённого препятствия типа балки (либо, в другой постановке, протяжённого горного массива на поток атмосферного воздуха). Более подробно теория и постановка базовой задачи обтекания пластины рассмотрена в [4].

Стационарная система уравнений гидродинамики при предположении несжимаемости среды (для воды это условие выполняется для очень широкого круга явлений, а для атмосферного воздуха – в случае малости скорости потока по сравнению со скоростью звука) и пренебрежении стратификацией среды выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \bar{V} &= 0 \\ (\bar{\nabla} \bar{V}) \bar{V} &= - \frac{\bar{\nabla} P}{\rho} + \nu \bar{\nabla}^2 \bar{V} . \end{aligned} \quad (62)$$

$$P = f(\rho, T)$$

Первое уравнение(непрерывности) выражает закон сохранения массы, второе – закон сохранения количества движения, а третье – термодинамическое уравнение состояния. Здесь  $V(x,z)$ ,  $P(x,z)$ ,  $\rho(x,z)$ ,  $T=\text{const}$  и  $\nu=\text{const}$  – соответственно скорость движения давление, плотность, температура и вязкость среды. Систему (62) можно путём несложных преобразований привести к системе двух уравнений для функции тока  $\psi$  и завихренности  $\zeta$ :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= \zeta \\ \nu \nabla^2 \zeta &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial z} . \end{aligned} \quad (63)$$

Как Вы видите, (63) – это система дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Пример связан с численным решением этой системы для функции тока и

завихрённости. Напомним, что проекции скорости связаны с этими величинами следующим образом:

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad V_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{и} \quad \zeta = \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}. \quad (64)$$

Давление и плотность в такой постановке задачи также однозначно выражаются через плотность тока.

Граничные условия задачи обтекания гор заключаются в задании условия прилипания ( $V_x=0$ ,  $V_z=0$ ) на нижней границе и условия невозмущенности потока на верхней границе ( $V_x=V^0$ ,  $V_z=0$ ). Слева и справа принимается допущение, что за пределами моделируемой области течение не изменяется, т.е.  $V_x=\text{const}$ ,  $V_z=\text{const}$ . В задаче обтекания пластины учитывается её симметрия, и полагается, что на оси симметрии функция тока постоянна, а завихренность (также вследствие симметрии) равна нулю. Соответственно, расчеты касаются только половины расчетной области. Кроме того, отличается условие на левой границе, а именно, учитывается равенство нулю завихренности в набегающем потоке. В задаче обтекания гор, напротив, учитывается прилипание жидкости к нижней границе.

Для компьютерных расчётов наиболее простым способом производится дискретизация уравнений (63) и граничных условий. Для этого расчётная область покрывается равномерной сеткой, и уравнения (63) записываются в разностной форме, например, на шаблоне «крест» (см. рис. 12):

$$\frac{\psi_{i-1}^j - 2\psi_i^j + \psi_{i+1}^j}{\Delta^2} + \frac{\psi_i^{j-1} - 2\psi_i^j + \psi_i^{j+1}}{\Delta^2} = \xi_i^j, \quad (65)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\xi_{i-1}^j - 2\xi_i^j + \xi_{i+1}^j}{\Delta^2} + \frac{\xi_i^{j-1} - 2\xi_i^j + \xi_i^{j+1}}{\Delta^2} = \\ & = \frac{V^0 \cdot \Delta}{4 \cdot \nu} \frac{(\psi_i^{j+1} - \psi_i^{j-1})(\xi_{i+1}^j - \xi_{i-1}^j) - (\psi_{i+1}^j - \psi_{i-1}^j)(\xi_i^{j+1} - \xi_i^{j-1})}{\Delta^2}. \end{aligned} \quad (66)$$

Неизвестные – это значения функции тока  $\psi^j$  и завихренности  $\xi^j$  во всех узлах сетки. Для того, чтобы число уравнений равнялось числу неизвестных, необходимо в дискретной форме записать и обсуждённые выше граничные условия. Квадратичная нелинейность определяется правой частью разностного уравнения (66). Коэффициент, входящий в (66)

$$R = \frac{V^0 \cdot \Delta}{\nu} \quad (67)$$

характеризует степень влияния вязких сил и называется *сеточным числом Рейнольдса*.

Предлагаемый численный метод реализации разностной системы (65-66) основан на ее преобразовании к виду:

$$\psi_i^j = f_i^j(\vec{\psi}, \vec{\xi}), \quad \xi_i^j = g_i^j(\vec{\psi}, \vec{\xi}), \quad (68)$$

где  $f_i^j(\vec{\psi}, \vec{\xi})$ ,  $g_i^j(\vec{\psi}, \vec{\xi})$  – это некоторые функции, зависящие, согласно (65-66), от значений сеточных функций тока и завихренности во всех соседних с  $(i, j)$ -м узлах.

Исходя из представления (68), организуется итерационный процесс: сначала задаётся некоторое начальное приближение (например, распределение функций тока и завихренности в невозмущённом потоке, известное аналитически), а затем в ходе итераций значение этих функций в каждом узле уточняется.

Для пересчёта «старых»  $\psi_i^j$  и  $\xi_i^j$  на «новые»  $\psi_i^{j'}$  и  $\xi_i^{j'}$  применяются простые формулы:

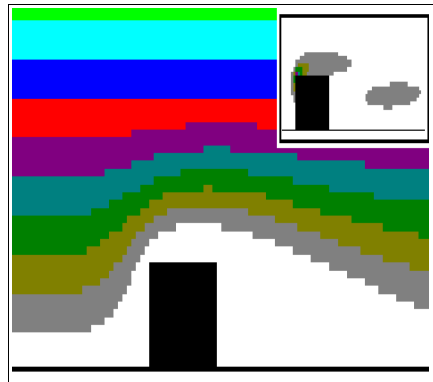
$$\psi_i^{j'} = (1-\omega) \cdot \psi_i^j + \omega \cdot f_i^j, \quad \xi_i^{j'} = (1-\omega) \cdot \xi_i^j + \omega \cdot g_i^j, \quad (69)$$

где коэффициент  $0 < \omega < 2$  называется *параметром релаксации*, а сам алгоритм – *итерационным методом Гаусса–Зейделя*. Применяя последовательно релаксацию к полю функций тока во всех пространственных узлах, а затем к полю завихренностей, можно ожидать, что рано или поздно итерационный процесс сойдётся к точному решению.

Приведем пример работы релаксационного метода (69). Используем значение гидродинамического числа Рейнольдса  $Re=1$  и, ради сравнения, на разных сетках (рис. 37 и 38), т.е. при разном сеточном значении  $Re$  (67). Оба рисунка представляют контурный график поля линий уровня, во врезке которого приведен график поля завихренности. В качестве нулевой итерации, необходимой для запуска метода Гаусса-Зейделя, выбран постоянный поток жидкости. Для такого, сравнительно малого, числа Рейнольдса, итерации сходятся к ламинарному решению (63).



**Рис. 37.** Решение (63) на сетке  $40 \times 20$  узлов методом Гаусса-Зейделя



**Рис. 38.** Решение (63) на сетке  $100 \times 50$  узлов (тем же методом)

Из сопоставления рис. 37 и 38 видно, что, несмотря на одинаковые гидродинамические условия задачи, решение получается несколько различным. А именно, на более подробной сетке (рис. 38) оно соответствует более возмущенному течению (вихрь, образующийся в результате обтекания пластины, отрывается от ее поверхности и образует водоворот). Собственно, дело обстоит примерно так же, как и в примере, который мы обсуждали в рамках раздела о псевдовязкости (см. §7).

Заметим, что при больших  $R$  трудно получить сходящееся решение, т.к. сильная нелинейность не позволяет использовать простой релаксационный алгоритм Гаусса-Зейделя.