

Пример: уравнение Бюргера

Еще усложним уравнение переноса, добавив в него диффузионное слагаемое:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = D \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} . \quad (39)$$

Это уравнение при $c(u)=u$ называют *уравнением Бюргера*. Физически оно является хорошей моделью «автомобильной пробки».

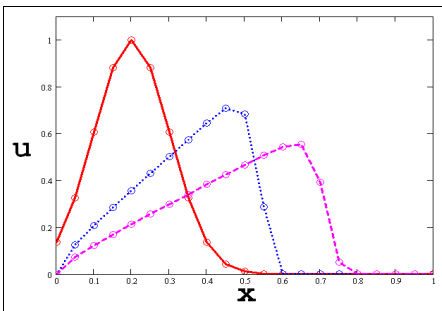


Рис. 24. Решение уравнения Бюргера ($c=20u$, $D=0.05$)

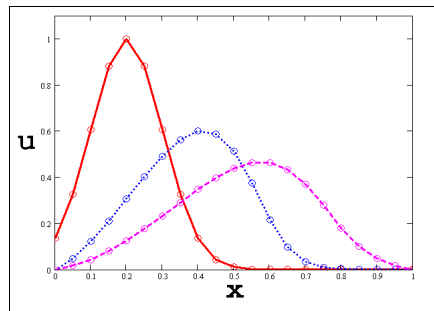


Рис. 25. Решение уравнения Бюргера ($c=10+10u$, $D=0.5$)

Решение (39) при помощи комбинированной явной схемы, полученной объединением формул (4) и (34), показано на рис. 24-25. На рис. 24 приведен случай слабой, а на рис. 25 – сильной диффузии. В первом случае слагаемое, ответственное за нелинейный перенос приводит к образованию разрывных решений, а во втором, благодаря диффузии, разрыва не происходит, и фронт решения размывается.

§6. 1-е дифференциальное приближение

Вернемся к уравнению переноса (34) с нулевым источником:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (40)$$

и разностной схеме (35) (см. рис. 18). Запишем ее в виде пересчета значения на верхнем слое через известные u_i и u_{i-1} с нижнего слоя:

$$\hat{u}_i = u_i + \frac{\tau \cdot c}{\Delta} (u_i - u_{i-1}) . \quad (41)$$

Теперь попробуем оценить невязку между разностной схемой (44) и самим уравнением (43). Для этого используем разложение функции $u(x,t)$ в ряд Тейлора в точке x_i, t_i . Сначала выпишем разложение для точки $u(x_i, t_i + \tau)$:

$$\hat{u}_i = u_i + u_t \cdot \tau + \frac{u_{tt} \cdot \tau^2}{2} + o(\tau^2) ; \quad (42)$$

а затем – для точки $u(x_{i-1}, t_i)$:

$$u_{i-1} = u_i - u_x \cdot \Delta + \frac{u_{xx} \cdot \Delta^2}{2} + o(\Delta^2) . \quad (43)$$

Теперь подставим это разложение в схему (41):

$$u_t + c \cdot u_x = \frac{1}{2} (\Delta \cdot u_{xx} + \tau \cdot u_{tt}) . \quad (44)$$

Если сравнить полученное выражение с исходным уравнением переноса (40), то мы увидим, что его правая часть определяет невязку разностной схемы (41). Полученное выражение уже, само по себе, примечательно, но мы отложим его обсуждение на шаг, выполнив еще одно дополнительное упрощение.

Далее, если продифференцировать уравнение переноса (40) сначала по t , а потом по x и вычесть один из результатов дифференцирования из другого, то мы получим соотношение:

$$c^2 \cdot u_{xx} = u_{tt} . \quad (45)$$

Подставив его в оценку невязки (44), получим:

$$u_t + c \cdot u_x = \frac{c}{2} (\Delta - c \cdot \tau) \cdot u_{xx} . \quad (46)$$

Напомним, что соотношение (46) мы получили, отталкиваясь от разностной схемы (41). Оказывается, создавая разностную схему для уравнения переноса, мы, на самом деле, разработали схему, которая с лучшей точностью аппроксимирует несколько другое дифференциальное уравнение (46), зависящее от выбранных шагов Δ и τ ! Это уравнение называется *1-м дифференциальным приближением* для разностной схемы (41).

Очевидно, что, исследуя свойства 1-го дифференциального приближения, можно получить важную дополнительную информацию о самой разностной схеме. В частности, если соотношение шагов по времени и пространству таково, что правая часть (46) положительна, т.е.

$$C \equiv \frac{c\tau}{\Delta} < 1, \quad (47)$$

то (46) похоже на уравнение Бюргерса (39). Конечно, оно зависит от параметров сетки, т.к. коэффициент диффузии для него равен

$$D = \frac{c}{2}(\Delta - c \cdot \tau). \quad (48)$$

Для разных сеток, точнее, для различных шагов по пространству и времени, коэффициент диффузии (48) будет разным. Приведем два примера решения уравнения переноса (40) посредством разностной схемы (41) с разными Δ и τ (начальное условие и профиль решения через 10 и 30 шагов по времени). Для расчетов рис. 26 шаг по пространству выбран малым, почти на грани устойчивости схемы. Согласно 1-му дифференциальному приближению (46), диффузионное слагаемое будет мало, и решение будет не очень сильно затухать с течением времени. На рис. 27 пространственный шаг выбран большим, что соответствует сильной диффузии. Из-за неё фронт решения размывается гораздо сильнее, и его амплитуда, по мере распространения профиля решения вправо, заметно уменьшается. Понятно, что численное решение с более подробным пространственным шагом

(рис. 26) является более правильным, нежели результат, выдаваемый более диссипативной схемой (рис. 27).

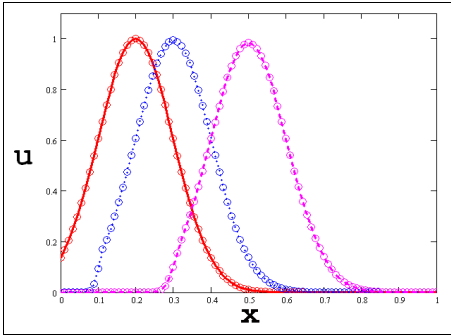


Рис. 26. Расчеты по схеме (41):
 $c=5, \Delta=1/90, \tau=0.02 \rightarrow D \approx 0.003, C=0.9$

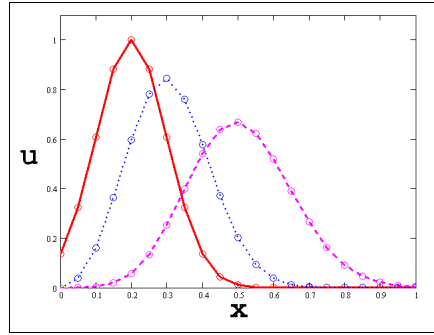


Рис. 27. Расчеты по схеме (41): $c=5,$
 $\Delta=1/20, \tau=0.02 \rightarrow D=0.1, C=0.2$

Конечно, именно так и должно быть, поскольку 1-е дифференциальное приближение разностной схемы есть уравнение диффузии с переносом. Чем сильнее диффузия, тем больше диссипативное слагаемое в 1-м дифференциальном приближении, и тем сильнее расплывается решение. Подчеркнем еще раз, что в исходном уравнении (40), которое мы решаем, диффузионных членов нет, а получающееся «расплывание» решения обусловлено исключительно диссипативными свойствами разностной схемы. (Кстати, поэтому такие разностные схемы называют *диссипативными*).

1-е дифференциальное приближение разностной схемы помогает оценить ее устойчивость. Как несложно заметить, соотношение (47), являющееся критерием отнесения 1-го дифференциального приближения к уравнению параболического типа, определяет условие Куранта для разностной схемы (41). Если оно нарушается, т.е. если

$$\frac{c\tau}{\Delta} > 1, \quad (49)$$

то (46) имеет вид уже не уравнения диффузии, а обратного уравнения теплопроводности (33) (конечно, тоже со слагаемым,

описывающим перенос). Как мы с Вами убедились, обратное уравнение теплопроводности – это некорректная задача. Применительно к схеме (41) это означает, что при больших пространственных шагах, нарушающих условие Куранта, разностная схема будет неустойчивой. Конечно, подобные рассуждения возможны далеко не всегда, поскольку не всегда свойства дифференциального уравнения, которым описывается 1-е дифференциальное приближение разностной схемы, хорошо известны.

Еще один важный аспект связан с исследованием порядка аппроксимации разностной схемы. Как уже было сказано, правая часть 1-го дифференциального приближения (46) представляет собой невязку исходного уравнения переноса (40) (с точностью до слагаемых первого порядка малости):

$$\frac{c}{2}(\Delta - c \cdot \tau) \cdot u_{xx} + o(\Delta + \tau) . \tag{50}$$

Таким образом, сразу можно заключить, что разностная схема (41) имеет 1-й *порядок аппроксимации*. Подчеркнем, что, как и в случае ОДУ (см. §3.8), определенный порядок аппроксимации вовсе не гарантирует, что сеточное решение будет аппроксимировать точное решение дифференциального уравнения с тем же порядком, т.е., что *порядок точности* схемы будет таким же. В особенности, это касается разрывных решений (соответствующий пример Вы найдете в следующих параграфах).

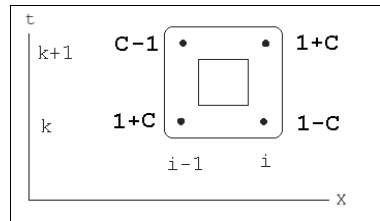


Рис. 28. Шаблон неявной схемы «квадрат» (2-го порядка)

В заключение приведем пример другой разностной схемы для уравнения переноса (40), 1-е дифференциальное приближение которой обладает сильно отличающимися свойствами. Будем использовать шаблон, изображенный на рис. 28, приводящий к симметричной неявной разностной схеме:

$$\frac{\hat{u}_i + \hat{u}_{i-1} - u_i - u_{i-1}}{2\tau} + c \cdot \frac{\hat{u}_i + u_i - \hat{u}_{i-1} - u_{i-1}}{2\Delta} = 0 \quad (51)$$

Несмотря на то, что схема неявная, для нее легко организовать бегущий счет. На рис. 28 показаны коэффициенты разностной схемы, которые несложно получить из (51). Число Куранта C , фигурирующее на рис. 28, определено, согласно (47). Можно показать, что схема (51) является безусловно-устойчивой, и что ее 1-е дифференциальное приближение записывается в виде [1]:

$$u_t + c \cdot u_x = \frac{c}{12} (\Delta^2 - c^2 \cdot \tau^2) \cdot u_{xxx} \quad (52)$$

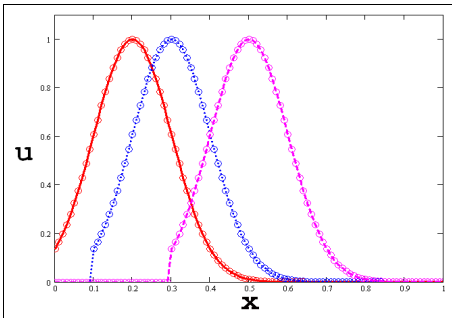


Рис. 29. Расчеты по схеме (51):
 $c=5, \Delta=0.01, \tau=0.002 \rightarrow C=1$

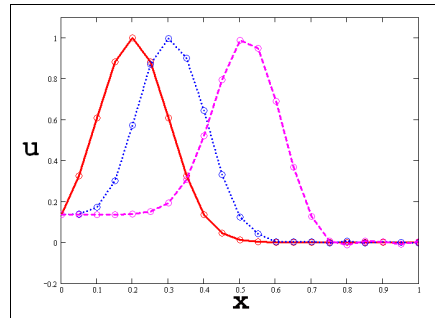


Рис. 30. Расчеты по схеме (51): $c=5,$
 $\Delta=0.05, \tau=0.002 \rightarrow C=0.2$

Невязка, стоящая в правой части (52), во-первых, зависит от квадрата шага по времени и квадрата шага по пространству. Поэтому и сама схема (51) обладает 2-м порядком аппроксимации. Во-вторых, невязка не является диссипативным членом уравнения, поэтому, в отличие от схемы (42), профиль решения с увеличением времени не размывается. В этом можно убедиться, сравнивая рис. 29 и 30, на которых изображено решение (на двух разных сетках), полученное по схеме (51), с соответствующими рис. 26 и 27, представляющими расчеты по явной схеме (42). Видно, что ни уменьшения амплитуды первоначального профиля, ни расплывания решения не наблюдается. Конечно, именно так и должно быть, поскольку 1-е дифференциальное приближение схемы (51) не содержит диффузионных слагаемых.