(графиком поверхности) можно визуализировать и решение одномерного динамического уравнения диффузии тепла, которое мы раньше показывали в виде последовательных по времени профилей u(x). Если взять в качестве одной из координат время, то решение будет иметь структуру, показанную на рис. 14.

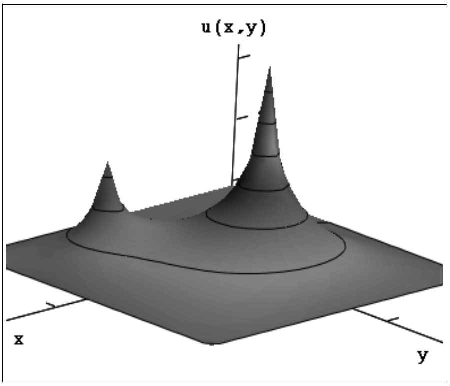

Рис. 13. *Решение стационарного двумерного уравнения диффузии тепла*

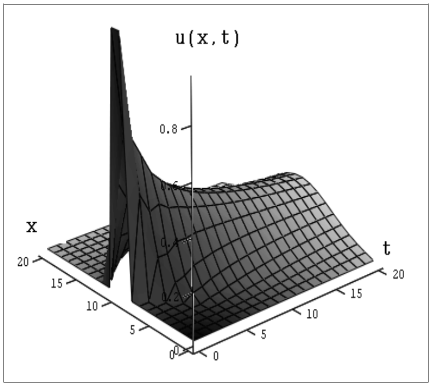

Рис. 14. *Решение одномерного уравнения (график поверхности)*

Пример: волновое уравнение

Еще один пример применения схемы «крест», для которого, однако, можно организовать «бегущий счет», связан с решением *волнового уравнения*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad . \tag{31}$$

Одномерное волновое уравнение (31) описывает, например, свободные колебания струны музыкального инструмента. В этом случае неизвестная функция u(x,t) имеет смысл смещения профиля струны относительно невозмущенного (прямолинейного) положения, а скорость волны c характеризует материал, из которого изготовлена струна.

Уравнение (31) содержит производные второго порядка, как по пространственной координате, так и по времени. Однако, постановка начальных условий (начальный профиль самой функции и ее первой производной) сильно отличает его от уравнения Пуассона, для которого также используется пятиточечная схема «крест». Если переписать волновое уравнение в виде системы двух уравнений в частных производных, введя вторую неизвестную функцию v по формуле:

$$v=u_t, \qquad (32)$$

то мы сразу увидим, что для системы двух уравнений несложно организовать «бегущий счет» как по явной, так и по неявной схеме Эйлера. В таком случае нам придется аппроксимировать конечной разностью только первую производную по времени, для чего подойдет четырехточечный шаблон.

Приведем два примера расчетов нескольких первых слоев по времени для волнового уравнения с нулевыми граничными условиями и $u_x(x,0)=0$ (рис. 15 и 16). Начальный профиль $u(x,t=0)$, разный для двух рисунков, показан на каждом из них сплошной кривой. В первом случае (рис. 15) решением является стоячая волна, а во втором – бегущая волна (рис. 16).

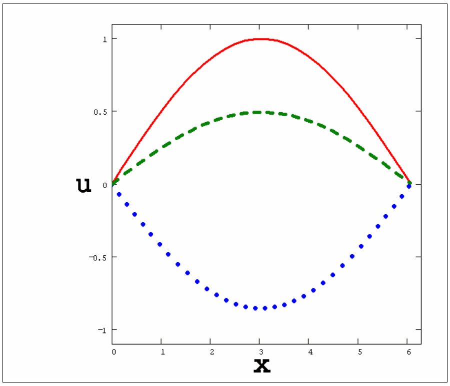

Рис. 15. *Решение волнового уравнения в виде стоячей волны*

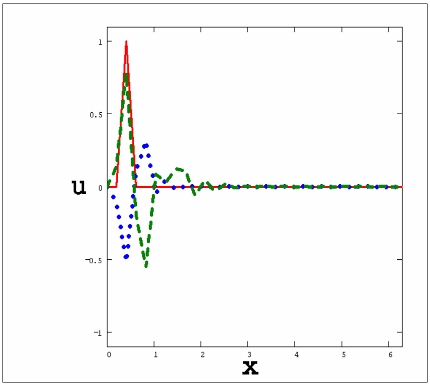

Рис. 16. *Решение волнового уравнения в виде бегущей волны*

Пример: обратное уравнение теплопроводности

Замечательными свойствами обладает так называемое обратное уравнение диффузии тепла, которое получается путем замены в исходном (прямом) уравнении переменной t на -t. Согласно