$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \phi(x, t, u) \quad , \tag{25}$$

а потом выберем определенный вид нелинейного источника, например, с кубической нелинейностью:

$$\phi(u) = 10^3 \cdot (u - u^3) \quad . \tag{26}$$

Коэффициент диффузии D, по-прежнему, считаем постоянным. В этом случае расчеты по явной схеме Эйлера дадут намного более интересные, нежели для линейного уравнения, решения. Оказывается, что, если задать источник в виде (26), то получится весьма неожиданное решение в форме тепловых фронтов, распространяющихся в обе стороны от зоны первичного нагрева (рис.10).

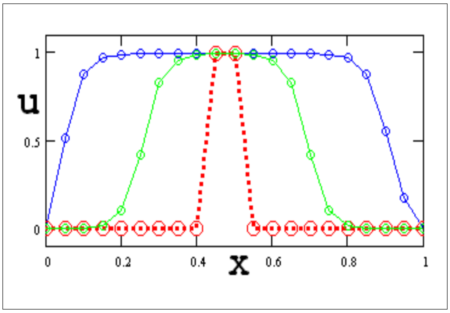

Рис. 10. *Нелинейное уравнение диффузии: решение – тепловая волна*

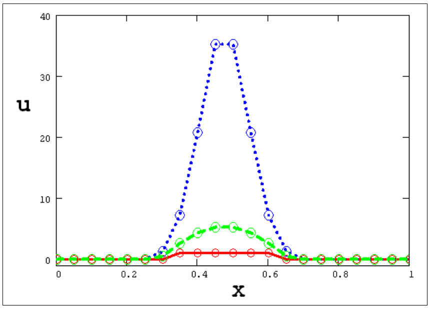

Рис. 11. *Нелинейная диффузия тепла: локализация горения*

Пример: Нелинейная диффузия – «горение с обострением»

Еще более удивительные решения уравнения диффузии тепла возможны при нелинейности не только источника, но и коэффициента диффузии. Например, если взять квадратичный коэффициент диффузии

$$D(u) = u^2, \tag{27}$$

что создаст в задаче кубическую нелинейность, и источник

$$\phi(u) = 10^3 \cdot u^{3.5} \quad , \tag{28}$$

то можно наблюдать эффект горения среды, локализованный в области ее первичного нагрева (рис. 11). На рис. 11 показаны 5-й, 6-й и 7-й шаги по времени, которые демонстрируют, что температура в центре среды сильно возрастает. Оказывается, это возрастание температуры носит неограниченный характер, и за конечное время температура обращается в бесконечность. Это – так называемый *S-режим горения*, называемый еще *горением «с обострением»*. Существенно, что такие интересные результаты, как тепловая волна и S-горение удается получить лишь численно.

Конечно, нелинейные (причем сильно нелинейные) уравнения диффузии описывают более сложные среды, нежели металлический стержень, показанный на рис.1. Однако, замечательно, что эти среды вполне реальны, и описанные эффекты можно наблюдать экспериментально на настоящих физических объектах.

Пример: стационарное двумерное уравнение диффузии тепла

До сих пор мы рассматривали одномерное уравнение теплопроводности, т.е. зависящее, помимо времени, только от одной пространственной координаты. Конечно, можно рассматривать не одномерную, а двух- или даже трехмерную конфигурацию. В двумерном случае уравнение теплопроводности запишется в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \phi(x, t, u) \quad . \tag{29}$$

Принципиальных отличий в построении разностных схем для двумерных уравнений нет. Надо только правильно определить расчетную область (которая будет иметь более сложную форму), поставить граничные условия и осуществить их дискретизацию.