Разностные схемы для задач на собственные значения

Задачи на собственные значения для ОДУ также можно решать разностным методом. Вернемся к уравнению (17), моделирующему гидродинамику и выпишем его еще раз, положив, ради простоты, ω=1 и V_0=1:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+1-k^2\right)\cdot V(z)=0 \quad . \tag{40}$$

Напомним, что граничными условиями служили выражения V(0)=V(1)=0, а число k являлось искомым собственным значением.

Выпишем теперь разностный аналог (40), аппроксимируя по трем пространственным точкам вторую производную (рис. 36):

$$\frac{V_{i+1}-2V_i+V_{i-1}}{\Delta^2}+1-k^2\cdot V_i=0 \quad . \tag{41}$$

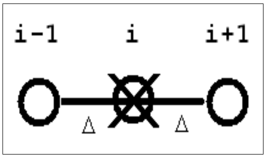

Рис. 36. *Шаблон схемы (40)*

Перегруппируем слагаемые:

$$V_{i-1}+(\Delta^2-2)V_i+V_{i+1}=-\Delta^2\cdot k^2\cdot V_i \quad (2\le i\le N\text{-}1). \tag{42}$$

Надо подчеркнуть, что система (42) пока содержит не N, а (N-2) уравнения, поскольку мы все еще не включили в нее граничные условия. Однако, простота этих граничных условий $V_0=V_N=0$ означает, что два крайних элемента вектора **V** уже определены (и равны нулю). Поэтому просто подставим их в уравнения (42) для i=2 и i=N-1 и получим уменьшенную систему из (N-2) уравнений.

Запишем данную систему уравнений в эквивалентной матричной форме:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}=\Lambda\cdot\mathbf{V}, \tag{43}$$

где $\Lambda=k^2\Delta^2$, а матрица **A** имеет вид, показанный на рис. 37.

$$
A \rightarrow \begin{pmatrix}
\Delta^2-2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & \Delta^2-2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \Delta^2-2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \Delta^2-2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \Delta^2-2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta^2-2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta^2-2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta^2-2
\end{pmatrix}
$$

Рис. 37. *Структура матрицы **A** (33) при N=10*

Что из себя представляет система (43)? Это классическая задача матричной алгебры, связанная с поиском собственных значений матрицы **A**, численные алгоритмы решения которой хорошо разработаны. Не останавливаясь особо на принципе работы этого алгоритма, приведем расчеты для N=10 и N=20 (рис. 38).

Как видно, в обоих случаях только три первых собственных значения положительны (несмотря на разное количество собственных чисел матриц разного размера). Это отвечает существованию соответствующих решений исходной задачи для ОДУ. Поскольку точные величины собственных значений для задачи известны, то можно убедиться в правильности ее решения.

$\Lambda := \mathrm{eigenvals}(A)$

N = 10

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.902 \\ 0.618 \\ 0.176 \\ -0.382 \\ -1 \\ -2.902 \\ -2.618 \\ -1.618 \\ -2.176 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{Ri - \left[(zH - z0)\cdot\frac{\sqrt{\Lambda_i}}{\Delta}\right]^2} = \begin{array}{|r|} \hline 3.129 \\ \hline 6.18 \\ \hline 9.08 \\ \hline \end{array}$$

$$\pi \cdot i = \begin{array}{|r|} \hline 0 \\ \hline 3.142 \\ \hline 6.283 \\ \hline \end{array}$$

N = 20

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.225 \\ 0.152 \\ 0.032 \\ -0.132 \\ -0.336 \\ -0.574 \\ -0.842 \\ -1.132 \\ -1.437 \\ -1.75 \\ -2.063 \\ -2.368 \\ -3.725 \\ -3.652 \\ -3.532 \\ -3.368 \\ -3.164 \\ -2.926 \\ -2.658 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{|r|} \hline 3.138 \\ \hline 6.257 \\ \hline 9.338 \\ \hline \end{array}$$

P

ис. 38. *Собственные значения (33) для N=10 и 20*