Задачи на собственные значения

Задачи на собственные значения – это краевые задачи для системы ОДУ, в которой правые части зависят от одного или нескольких параметров. Сами эти параметры неизвестны; к тому же, решение краевой задачи существует только при определенных их значениях, которые называются *собственными значениями* краевой задачи. Решения, соответствующие этим собственными значениям, называют *собственными функциями* задачи.

Правильная постановка задач на собственные значения требует формулировки количества граничных условий, равного сумме числа уравнений и числа собственных значений. Физическими примерами задач на собственные значения являются, например, рассмотренные в качестве примеров ниже уравнение колебаний струны, уравнение Шредингера в квантовой механике и уравнения волн в гидродинамике.

С вычислительной точки зрения, задачи на собственные значения очень похожи на рассмотренные выше краевые задачи. В частности, для многих из них также применим метод стрельбы (см. §3). Отличие заключается в пристрелке не только по недостающим левым граничным условиям, но еще и по искомым собственным значениям. Соответственно, в качестве недостающих (пробных) начальных условий метода пристрелки следует включить и начальное приближение для искомого собственного значения.

Пример: волновое уравнение

Рассмотрим методику решения задач на собственные значения на конкретном примере определения собственных упругих колебаний струны. Профиль колебаний струны y(x) описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\cdot\frac{dy(x)}{dx}\right)=-k^2\cdot q(x)\cdot y(x)\quad . \tag{8}$$

Здесь p(x) и q(x) – жесткость и плотность, которые, вообще говоря, могут меняться вдоль струны. Если струна закреплена на обоих концах, то граничные условия задаются в виде y(0)=y(1)=0 (рис. 5).

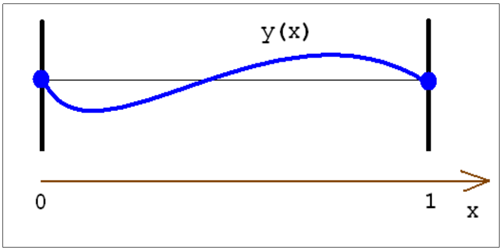

Рис. 6. *Модель задачи (8)*

Сформулированная задача является частным случаем задачи *Штурма–Лиувилля*. Поскольку решается система двух ОДУ, содержащая одно собственное значение k, то, на первый взгляд, кажется, что задача требует задания 2+1=3 условий. Однако, как легко убедиться, уравнение колебаний струны – линейное и однородное, поэтому, в любом случае, решение y(x) будет определено с точностью до множителя. Это означает, что производную решения можно задать произвольно, например, y'(0)=1, что и будет третьим условием. Тогда краевую задачу можно решать как задачу Коши, а пристрелку вести только по одному параметру – собственному значению.

Если считать струну однородной, то p(x)=const и q(x)=const, и уравнение (8) приобретает вид:

$$y''(x)=-k^2\cdot y(x). \quad (9)$$

Перед тем, как перейти к его решению, скажем несколько слов о смысле уравнения. На самом деле, колебания струны – процесс динамический, т.е. движение профиля струны y(x) есть функция времени y(x,t). Это явление описывается уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}=c^2\cdot\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} . \quad (10)$$

Уравнения в частных производных будут рассмотрены в рамках следующей главы (и волновое уравнение будет одним из тех примеров, которые станут иллюстрировать соответствующие численные алгоритмы). Если предположить, что искомая функция $y(x,t)$ имеет вид $y(x)\cdot\exp(i\omega t)$, то окажется, что уравнение в частных производных (10) переходит в более простое обыкновенное дифференциальное уравнение (9), причем его параметры (скорость волны c, ее частота ω и волновое число k) связаны соотношением:

$$c=\omega/k. \tag{11}$$

Конечно, приведенные уравнения (9) и (11) имеют простое аналитическое решение (в виде соответствующих гармонических функций), что дает нам дополнительный повод проверить правильность численного решения.

Подобно решению обычных краевых задач, задачи на собственные значения также можно решать при помощи алгоритма стрельбы. Организовав пристрелку по собственному значению k, можно отыскать решение ОДУ (9) $y(x,k)$, которое (с заданной точностью) удовлетворит правому граничному условию. Соответствующий алгоритм удобно записать, подобно (6), через функцию $f(k)$ невязки выполнения (нулевого) краевого условия на правой границе:

$$f(k)=y(x=1,k). \tag{12}$$

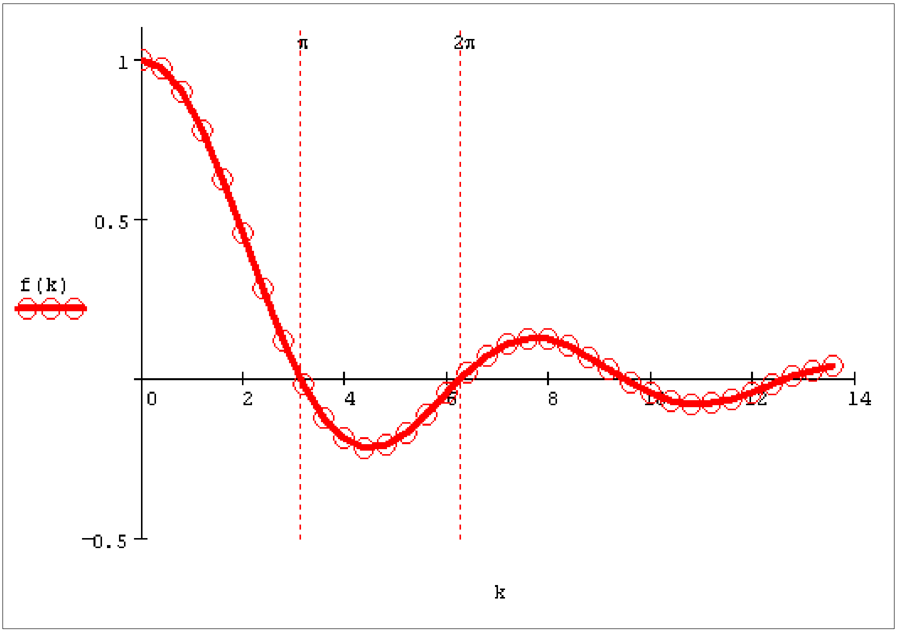

Рис. 7. *Вид функции невязки f(k) (12)*

Расчет функции f(k) для волнового уравнения (9) приведен на рис. 7, из которого видно, что алгебраическое уравнение

$$f(k)=0 \tag{13}$$

имеет не один, а бесконечное множество корней. Положение двух первых корней, т.е. собственных чисел задачи k отмечено пунктиром. Чтобы отыскать численным методом несколько первых собственных чисел, следует *просканировать* значения параметра, выбирая последовательные начальные приближения k={0, h, 2h,. ..} (где h – малый шаг сканирования) и запуская всякий раз алгоритм пристрелки.

Зная аналитическое выражение для собственных значений k=Nπ, легко убедиться в правильности компьютерного решения задачи.

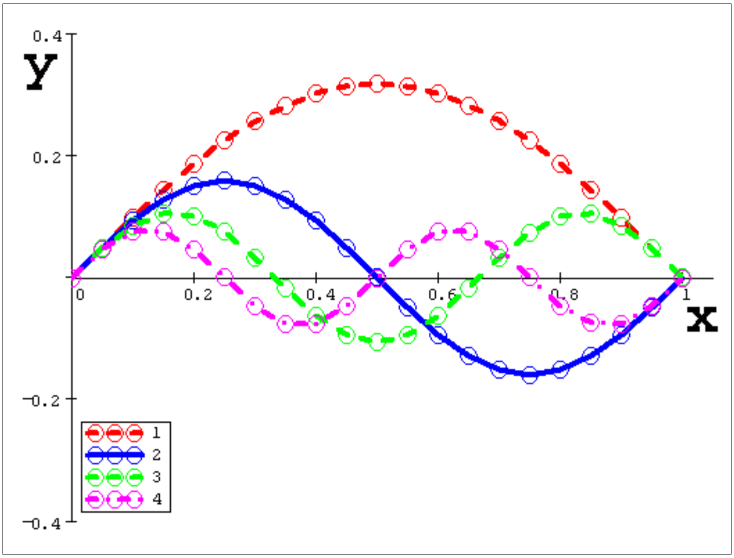

Рис. 8. *Собственные функции волнового уравнения (9)*

После того, как собственные значения определены посредством пристрелки, остается решить соответствующие задачи Коши, чтобы получить сами решения y(x,k), т.е. собственные функции задачи. Четыре первых собственных функции, рассчитанные при помощи алгоритма Рунге-Кутты, показаны на рис. 8.

Еще раз отметим, что оба рисунка получены при помощи численного решения задачи (9), а именно, алгоритма пристрелки. Конечно, в них легко угадывается (гармонические) аналитические решения.