Системы уравнений

Линейные и нелинейные уравнения

I-94 Система двух уравнений. Принято говорить, что несколько уравнений образуют систему, если во всех этих уравнениях каждая из букв x, y, ... означает одно и то же число для всех уравнений, например:

$9\ x+3\ y=17$

$-5\ x+9\ y=-13$.

Поскольку и x, и y входят в приведенные уравнения в 1-й степени, то такую систему называют системой ***линейных*** алгебраических уравнений (сокращенно, ***СЛАУ***).

I-95 Способ подстановки. Из одного уравнения, например, из первого, определим одно какое-нибудь неизвестное, например, y, в зависимости от другого неизвестного x:

$$y=\frac{17}{3}-3\ x$$

Так как второе уравнение должно удовлетворяться теми же значениями, как и первое, то мы можем подставить в него вместо y найденное выражение, отчего получим уравнение с одним неизвестным x:

$$-5\ x+9\left(\frac{17}{3}-3\ x\right)=-1\ .$$

Решим это уравнение:

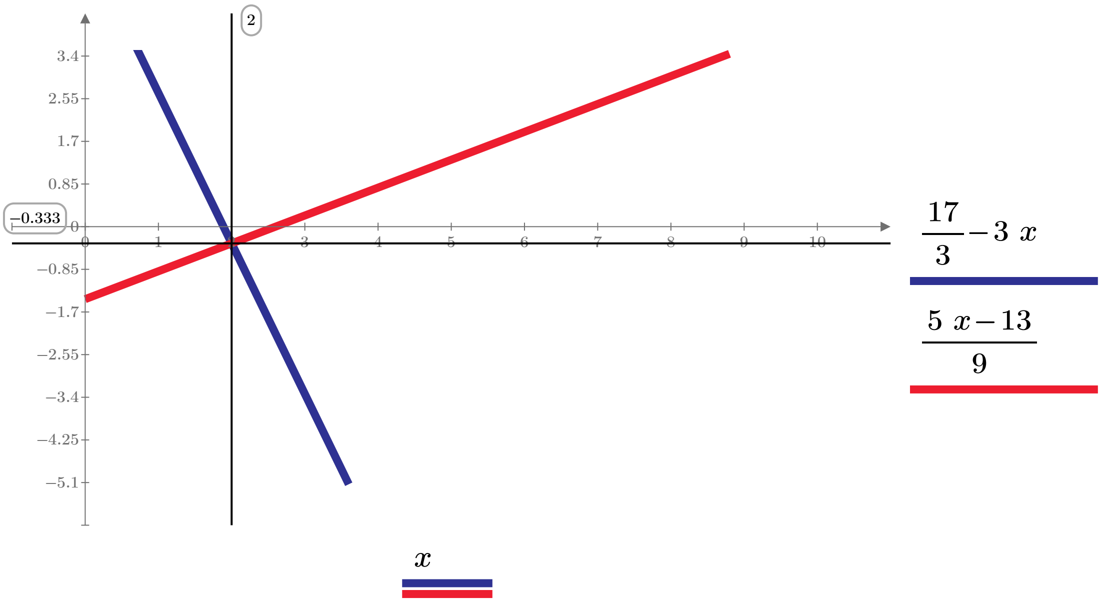
$$x:=\frac{-13-3\cdot 17}{-5-9\cdot 3}=2$$

Тогда: $y:=\frac{17}{3}-3\ x=-0.333$

Правило. Чтобы решить систему двух уравнений с двумя неизвестными способом подстановки, надо определить из какого-нибудь уравнения одно неизвестное в зависимости от другого неизвестного и полученное выражение подставить в другое уравнение, от этого получается уравнение с одним неизвестным. Решив его, находят это неизвестное. Подставив найденное число в выражение, выведенное раньше для первого неизвестного, находят и это другое неизвестное.

II-62 Графический способ решения уравнения. Начертив графики каждого из данных уравнений (а в случае линейных уравнений они будут прямыми линиями), найдем координаты точек пересечения этих графиков; это и будут корни уравнений:

$x:=-1.1,-1..10$



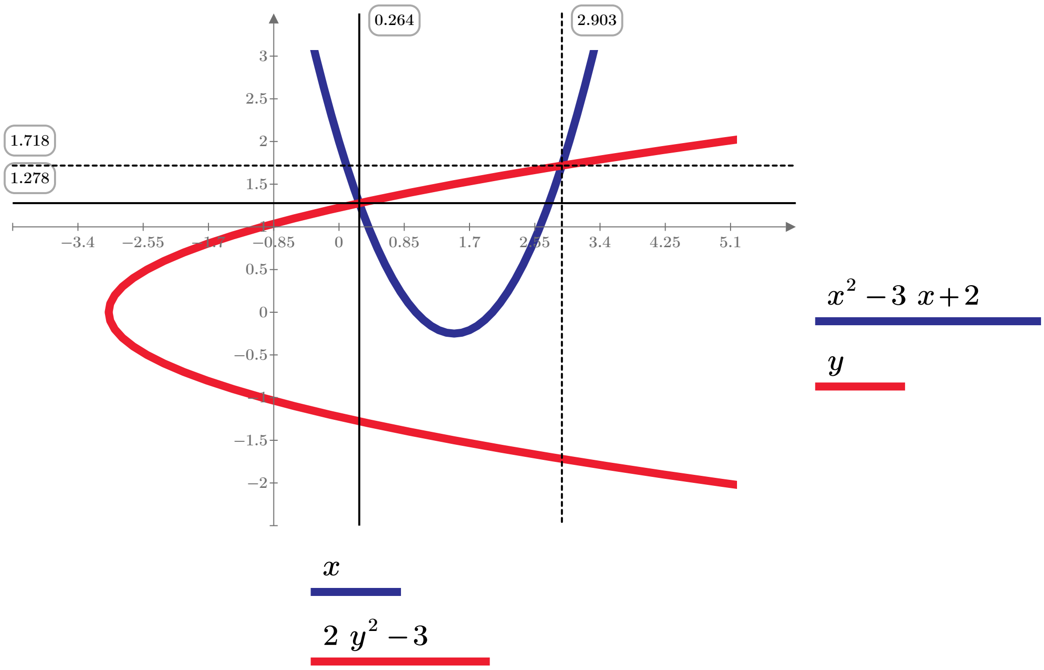
Аналогично можно решить и любую другую систему 2-х уравнений (если удастся нарисовать график каждого из уравнений), например:

$y = x^2 - 3\ x + 2$

$x = 2\ y^2 - 3$.

$x := -1.1, -1..5$

$y := -5.1, -5..5$



Эту нелинейную систему также можно решить способом подстановки. Из первого уравнения подставим неизвестное y во второе и получим нелинейное уравнение от другого неизвестного x:

$x = 2\ \left(x^2 - 3\ x + 2\right)^2 - 3$

Или (после переноса x в противоположную часть, чтобы приравнять 0):

$2\ \left(x^2 - 3\ x + 2\right)^2 - 3 - x = 0$.

Решим это уравнение численно (а потом и графически):

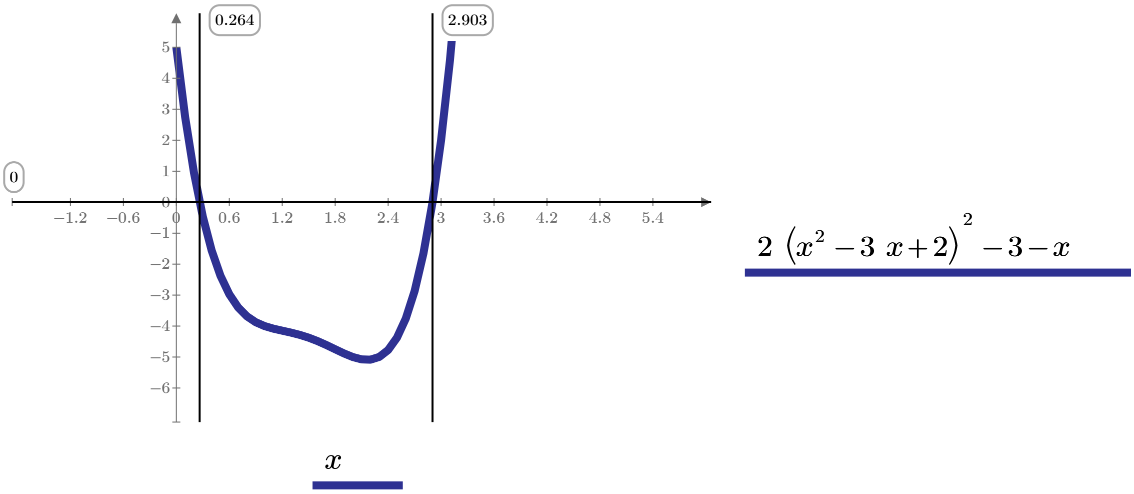
$x1 := \mathrm{root}\left(2\ \left(x^2 - 3\ x + 2\right)^2 - 3 - x, x, -1, 1\right) = 0.264$

$y1 := x1^2 - 3\ x1 + 2 = 1.278$

$x2 := \mathrm{root}\left(2\ \left(x^2 - 3\ x + 2\right)^2 - 3 - x, x, 1, 5\right) = 2.903$

$y2 := x2^2 - 3\ x2 + 2 = 1.718$

Для численного поиска корня (например, методом перебора, как в случае "волшебной палочки" **root**) необходимо примерно представлять, где именно располагаются корни.
Альтернативой служит сплошное сканирование, когда все пространство переменной x разбивается на отрезки, и из каждого отрезка запускается численный алгоритм, хотя бы тот же **root**.



I-100 Система трёх и более уравнений. Аналогично может быть определена система трех (или более) уравнений с любым количеством неизвестных. Эти системы (как и системы 2-х уравнений или даже просто одно уравнение) может иметь одно или несколько решегний, иметь бесконечное множество решений или не иметь решений вовсе.

Например, для линейных систем, для того чтобы можно было найти определённые численные значения для $M:=3$ неизвестных x, y и z, необходимо, чтобы была задана система $N:=M=3$ уравнений. Такая система может быть решена способом подстановки (I-101), а также способом алгебраического сложения (I-102).

К-0 Замечание. Однако, даже для простейшего линейного случая системы из N линейных уравнений с N неизвестными нельзя гарантировать и того, что решение будет ***существовать***, ни того, что (если решение существует) оно будет ***единственным***. Точнее, для СЛАУ может существовать либо одно, либо бесконечное множество решений, о чем пойдет речь в главах, посвященных ***линейной алгебре***.