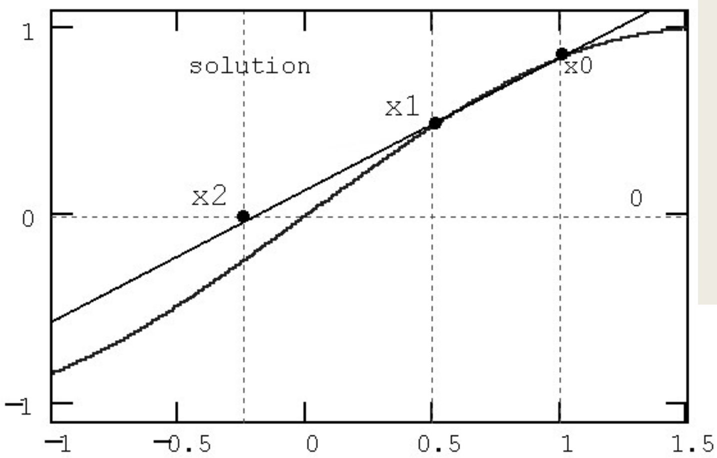
Алгебра
О численном решении уравнений: алгоритм секущих

Один из наиболее простых численных методов отыскания корней алгебраических уравнений $f(x)=0$ называется *алгоритмом секущих* и состоит (в одномерном случае) в следующем. Сначала выбирается начальное приближение к корню: x0=x и расчитывается следующая точка x1=x0+h, где h – это шаг. Затем вычисляются значения f0 =f(x0) и f1 =f(x1). Через эти две точки (x0, f0) и (x1, f1) проводится секущая – прямая линия, которая пересекает ось X в некоторой точке x2. Эта точка принимается за второе приближение. Новая секущая проводится через точки (x1, f1) и (x2, f2), тем самым определяя третье приближение, и т. д.

Если на каком-либо n-м шаге оказывается, что f(xn) меньше наперед заданной погрешности, то итерационный процесс прерывается, и xn выдается в качестве решения.

Примечание: более эффективны градиентные численные алгоритмы, основанных на последовательных приближениях к истинному решению уравнения, которые вычисляются с помощью производной от f(x).



Алгоритм секущих:

- Выбирается 0-е приближение к корню
- Выбирается шаг и определяется 1-е приближение к корню
- Через эти две точки проводится секущая – прямая линия, которая пересекает ось X в некоторой точке, которая принимается за 2-е приближение.
- Новая секущая проводится через 1-ю и 2-ю точки, тем самым определяя 3-е приближение, и т. д.

Для решения уравнения с одним неизвестным в Mathcad Express предусмотрена встроенная функция `root`, которая, в зависимости от типа задачи, может включать либо два, либо четыре аргумента и, соответственно, использует разные алгоритмы поиска корней.

- `root(f(x),x)`;
- `root(f(x),x,a,b)`:
  - `f(x)` — скалярная функция, определяющая уравнение `f(x)=0`;
  - `x` — имя скалярной переменной, относительно которой решается уравнение;
  - `a,b` — границы интервала, внутри которого происходит поиск корня.

Первый тип функции `root`, аналогично встроенной функции `Find`, требует дополнительного задания начального значения переменной `x`, для чего нужно просто перед применением функции `root` присвоить `x` некоторое число. Таким образом, присвоение начального значения требует априорной информации о примерной локализации корня, т. к. поиск корня будет производиться вблизи этого числа.

Принцип работы функции `root` объясняется примером:

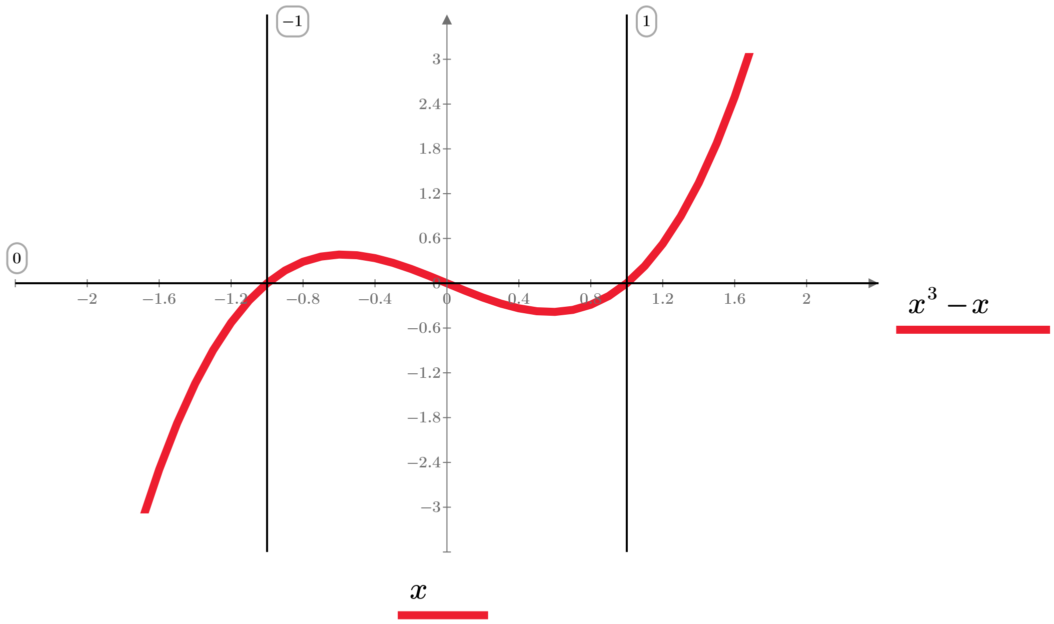
$$f(x) := 3\ x + 1$$
$$\mathrm{root}\left(f(x), x, -1, 1\right) = -0.333$$

$$x := 1$$
$$\mathrm{root}\left(f(x), x\right) = -0.333$$

Для решения уравнения при помощи функции `root(f(x),x,a,b)` не требуется задавать начального приближения, а достаточно указать интервал [`a,b`]. Поиск корня будет осуществлен в промежутке между `a` и `b` альтернативным численным методом (Риддера или Брента). Когда `root` имеет четыре аргумента, следует помнить о двух ее особенностях. Во-первых, внутри интервала не должно находиться более одного корня, иначе будет найден один из них, заранее неизвестно, какой именно. Во-вторых, значения `f(a)` и `f(b)` должны иметь разный знак, иначе будет выдано сообщение об ошибке.

Пример 2: задача. Существуют ли такие два куба, для которых отношение объемов равно отношению их ребер? Обозначим переменной x отношение ребер этих кубов. Тогда условие задачи выразит уравнение $x^3 = x$, или $x^3 - x = 0$:

$$x := -2, -1.9 .. 2$$



Уравнение имеет три корня, но только один из них положительный (нас интересуют только положительные корни, ведь отношение ребер может быть только больше 0). Этот корень равен 1, т.е. двух разных кубов, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

$$\mathrm{root}\left(x^3 - x, x, -.5, .5\right) = 0$$

$$\mathrm{root}\left(x^3 - x, x, -5, -.1\right) = -1$$

$$\mathrm{root}\left(x^3 - x, x, 0.1, 5\right) = 1$$