Алгебраические дополнения и миноры

Введем два дополнительных термина, с которыми связано еще несколько важных свойств определителей. Рассмотрим матрицу **A** размером $N \times N$. Выделим у нее элемент A_{ij} и затем вычеркнем из матрицы i–ю строку и j–й столбец (рис. 2.2). В результате вычеркивания одного столбца и одной строки получится другая матрица размером $(N-1)\times(N-1)$. Определитель этой матрицы называют *минором* элемента A_{ij} (пример 2.31). Обозначим этот минор символом M_{ij}. Тогда *алгебраическим дополнением* элемента A_{ij} (пример 2.32) назовем число $A^{+}_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$.

Рис. 2.2. К определению алгебраического дополнения

Пример 2.31. Миноры элементов A_{11} и A_{21} матрицы

$$A := \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ -3 & -4 & -5 \\ 33 & 77 & 99 \end{pmatrix}$$

$$\text{submatrix}(A, 2, 3, 2, 3) = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 77 & 99 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 77 & 99 \end{pmatrix}\right| = -11$$

$$\left|\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 77 & 99 \end{pmatrix}\right| = 253$$

Пример 2.32. Алгебраические дополнения элементов A_{11} и A_{21} матрицы из предыдущего примера

$$(-1)^{1+1}\cdot\left|\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 77 & 99 \end{pmatrix}\right| = -11$$

$$(-1)^{2+1}\cdot\left|\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 77 & 99 \end{pmatrix}\right| = -253$$

Для алгебраических дополнений справедливы два важных свойства:

- скалярное произведение столбца (или строки) матрицы на вектор, собранный из алгебраических дополнений того же столбца (или строки) равно определителю матрицы (пример 2.33):

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij}A^{+}_{ij} = \det(\mathbf{A}), \qquad \sum_{i=1}^{N} A_{ij}A^{+}_{ij} = \det(\mathbf{A})$$

- скалярное произведение столбца (или строки) матрицы на вектор, собранный из алгебраических дополнений другого столбца (или строки) этой матрицы, равно нулю (пример 2.34):

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij}A^{+}_{kj} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} A_{ij}A^{+}_{ik} = 0$$

Первое из перечисленных свойств называют *разложением* определителя матрицы **A** *по элементам* j-го столбца (или i-й строки соответственно). В примере 2.33 демонстрируется разложение определителя матрицы по элементам ее 1-го столбца и 1-й строки. В примере 2.34 взяты соответственно 3-й столбец (2-я строка) матрицы и те же самые алгебраические дополнения ее 1-го столбца (1-й строки).

Пример 2.33. Разложения определителя по элементам столбца (строки) матрицы

$$\left|\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ -3 & -4 & -5 \\ 33 & 77 & 99 \end{pmatrix}\right| = 264$$

$$9\cdot(-1)^{1+1}\cdot\left|\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 77 & 99 \end{pmatrix}\right| + -3\cdot(-1)^{2+1}\cdot\left|\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 77 & 99 \end{pmatrix}\right| + 33\cdot(1)^{3+1}\cdot\left|\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}\right| =$$

$$9\cdot(-1)^{1+1}\cdot\left|\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 77 & 99 \end{pmatrix}\right| + 8\cdot(-1)^{1+2}\cdot\left|\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 33 & 99 \end{pmatrix}\right| + 7\cdot(1)^{1+3}\cdot\left|\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 33 & 77 \end{pmatrix}\right| = 26$$

Пример 2.34. Скалярное произведение столбца (строки) матрицы на вектор алгебраических дополнений другого столбца (строки) равно нулю (матрица взята из предыдущего примера)

$$7\cdot(-1)^{1+1}\cdot\left|\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 77 & 99 \end{pmatrix}\right| + -5\cdot(-1)^{2+1}\cdot\left|\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 77 & 99 \end{pmatrix}\right| + 99\cdot(1)^{3+1}\cdot\left|\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$-3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\left|\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 77 & 99 \end{pmatrix}\right| + -4\cdot(-1)^{1+2}\cdot\left|\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 33 & 99 \end{pmatrix}\right| + -5\cdot(1)^{1+3}\cdot\left|\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 33 & 77 \end{pmatrix}\right| =$$