Определители

В конце прошлого раздела мы ввели для матриц скалярную характеристику – норму, помогающую (правда, весьма грубо) сравнивать матрицы по величине их элементов. Помимо норм, существует еще одна исключительно важная числовая характеристика матриц, называемая *определителем*. Приведем определения и примеры вычисления определителей, начав с простейшего случая матрицы `2x2`, перейдя затем к случаю `NxN` и заканчивая общим случаем матрицы `MxN`.

Зачем нужны определители?

Несколько забегая вперед, отметим, что определители характеризуют степень линейной зависимости строк и столбцов матриц, а также возможность успешного разрешения систем линейных уравнений, определяемых матрицей **Ax**=**b**. Самым важным является факт равенства (или близости) определителя нулю. В частности, для матрицы с нулевым определителем не существует обратной матрицы.

Определитель 2x2

Определителем второго порядка, или определителем матрицы *2x2*, называется число (пример 2.18).

Пример 2.18. Определитель второго порядка

$$\left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| \rightarrow a \cdot d - b \cdot c$$

Замечание

Определители называют по-другому *детерминантами*. Кроме того, иногда употребляют термины типа «*определитель, порожденной матрицей 2x2*». Обозначать определитель принято двумя вертикальными чертами (слева и справа от самой матрицы), При этом зачастую круглые скобки, обозначающие матрицу, опускают. Также допускается запись определителя матрицы **A** в виде или $|\mathbf{A}|$=det(**A**).

В примере 2.19 приводится расчет определителей некоторых матриц размера `2x2`.

Пример 2.19. Примеры вычисления определителей второго порядка

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right| = -2 \qquad \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right| = 0 \qquad \left|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}\right| = 0$$

Определитель 3x3

Определителем третьего порядка, или определителем матрицы *3x3*, называется число (пример 2.20).

Пример 2.20. Определитель третьего порядка

$$\left|\begin{pmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ u & v & w \end{pmatrix}\right| \rightarrow a \cdot g \cdot w - a \cdot h \cdot v - f \cdot b \cdot w + f \cdot c \cdot v + u \cdot b \cdot h - u \cdot c \cdot g$$

Рис. 2.1. К вычислению определителя третьего порядка

На рис. 2.1 иллюстрируется простое правило, которое помогает запомнить, как вычисляется определитель третьего порядка. Следует перемножить элементы матрицы, находящиеся на ее главной диагонали и сложить их с произведениями элементов, отмеченных на левой части рисунка треугольниками (которые имеют сторону, параллельную главной диагонали). Затем из полученной суммы следует вычесть произведения элементов, которые отмечены линиями на правой части рисунка (они выстраиваются вдоль другой, *вспомогательной*, диагонали матрицы).

Пример 2.21 демонстрирует несколько расчетов определителей третьего порядка.

Пример 2.21. Примеры вычисления определителей третьего порядка

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\right| = 0 \qquad \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 77 & 88 & 99 \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 79 & 9 \end{pmatrix}\right| = -143 \qquad \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1$$

Определитель `NxN`

Перейдем к формулировке общего термина определителя `N`-го порядка. Очевидно, оно должно оставлять справедливыми данные в предыдущих подразделах определения детерминантов `2`-го и `3`-го порядков.

> ***Замечание***
>
> Определителем первого порядка (или матрицы `1x1`) называют само число, являющееся единственным элементом такой матрицы.

Прежде, чем дать общее определение, сделаем некоторые пояснения и сформулируем дополнительные понятия.

Рассмотрим последовательность `N` чисел `1,2,...,N`. Ее *перестановкой* называется другая последовательность этих же чисел, если они расположены в другом порядке. Заметим, что исходную упорядоченную последовательность `1,2,...,N` называют также *основной перестановкой*. Очевидно, что любая перестановка может быть получена из основной перестановки путем последовательных перемен местами пар ее элементов. Каждая такая смена мест пар элементов называется *транспозицией*.

Например, последовательность чисел `1,2,3,4` в результате транспозиции элементов `3` и `4` дает перестановку `1,2,4,3`, а еще одна транспозиция элементов `2` и `4` дает новую перестановку `1,4,2,3` и т.д. Отметим, что перестановка, получающаяся из основной путем совершения четного количества транспозиций называется *четной* перестановкой, а в результате нечетного числа транспозиций – *нечетной*.

Сделав эти предварительные замечания, перейдем к формулированию термина определителя N-го порядка. Обозначим некоторую перестановку последовательности чисел `1,2,...,N` посредством индексов $i_1, i_2, ..., i_N$, а натуральным числом t(i) – общее число транспозиций отдельных элементов последовательности, которое необходимо совершить для генерации данной перестановки из основной перестановки. Тогда *определителем N-го порядка*, или определителем матрицы *NxN*, называется сумма:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1N} \\ & \cdots & \\ A_{N1} & \cdots & A_{NN} \end{vmatrix} = (-1)^{t(i)} \sum_{i} A_{1i_1} A_{2i_2} \ldots A_{1i_N}.$$

Таким образом, четные перестановки индексов (включая основную перестановку) соответствуют слагаемым (или, по-другому, *членам*) определителя со знаком «+», а нечетные – членам, взятым с отрицательным знаком.

Проверим справедливость этого определения для случаев `N=1,2,3`.
Для `N=1`, т.е. единственного индекса $i_1=1$ возможна единственная (основная) перестановка, поэтому определитель равен единственному элементу матрицы. Для `N=2`, т.е. для двух индексов `1` и `2` существуют две перестановки – основная `(1,2)` и вторая (нечетная) `(2,1)`. Поэтому определитель матрицы равен сумме двух членов (первый, соответствующий основной, четной, перестановке, взят со знаком «+», а второй – со знаком «–»): $\det(\mathbf{A}) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$.

Несложно проверить, что для `N=3`, имеются три четные `(1,2,3)`, `(2,3,1)`, `(3,1,2)` и три нечетные перестановки `(1,3,2)`, `(2,1,3)`, `(3,2,1)`. Сравнивая соответствующие формулы, можно заключить, что определение, которое мы дали ранее для определителя третьего порядка также полностью удовлетворяет общему правилу для определителя порядка `N`, если взять `N=3`.

Формулы вычисления определителей порядка выше третьего весьма громоздки (и быстро становятся все более сложными с ростом `N`), поэтому для расчета определителей разработаны специальные методы, которые будут рассмотрены ниже. В примере 2.22 приводится пример расчетов в Mathcad определителей высших порядков.

Пример 2.22. Расчет определителей порядка N=4 и N=5

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 0 \end{pmatrix}\right| = 1.14 \times 10^3$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -4 & 5 & -5 \\ 6 & -6 & 7 & -7 & 8 \\ -8 & 9 & -9 & 10 & -10 \\ 11 & -11 & 12 & -12 & 13 \end{pmatrix}\right| = 0$$