Ортогональные матрицы

Квадратная матрица $\mathbf{Q}$ называется ортогональной, если $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}$ (пример 2.15). Из этого определения следует, что ортогональная матрица $\mathbf{Q}$ – невырожденная и $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$, а также и то, что столбцы (и строки) ортогональной матрицы ортогональны между собой. Очевидно, что единичная матрица является ортогональной. Ортогональной является также и матрица, образованная в результате перестановок столбцов (или строк) единичной матрицы.

Для двух любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ (разумеется одного размера, соответствующего размеру ортогональной матрицы $\mathbf{Q}$) выполняется тождество $(\mathbf{Qx}, \mathbf{Qy}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (пример 2.16).

Пример 2.15. Ортогональная матрица

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^T \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 2.16. Для ортогональных матриц $(\mathbf{Qx}, \mathbf{Qy}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$\left[Q \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} \right] \cdot \left[Q \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = -48 \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix} = -48$$