Матрицы

Этот раздел посвящен понятию матрицы и введению основных математических действий, которые можно производить над матрицами.

Определение матрицы

Матрицей $\mathbf{A}$ размера $M\times N$ называется упорядоченная комбинация чисел A_{ij}, заданная в форме таблицы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1N} \\ & \cdots & \\ A_{M1} & \cdots & A_{MN} \end{pmatrix}.$$

Как легко подсчитать, матрица размера $M\times N$ содержит ровно $M \cdot N$ чисел, называемых *элементами* матрицы. Элементы располагаются в M строках и N столбцах матрицы (пример 2.1). Здесь и далее мы будем обозначать матрицы жирным символом, а элементы матрицы – тем же символом (с обычным начертанием), снабженным индексами (чаще всего, нижними).

Квадратной матрицей (пример 2.2) называется матрица $N\times N$ (с равным числом строк и столбцов). Квадратные матрицы занимают особое место в линейной алгебре, поскольку для них определено большее число математических операций. Элементы A_{ii} называются *диагональными*.

Под определение матрицы подпадают и объекты, введенные в прошлой главе (векторы). Очевидно, что вектор-столбец является матрицей размера $N\times 1$, а вектор-строка – матрицей размера $1\times N$ (пример 2.3).

Пример 2.1. Матрица 3x2

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{2,1} = 3$$

Пример 2.2. Квадратная матрица 2x2

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Пример 2.3. Матрицы-векторы

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Равные матрицы

Две матрицы **A** и **B** называются равными, если равны все их элементы, т.е. все числа $A_{ij}=B_{ij}$.

Нулевая и единичная матрицы

Нулевой матрицей размера MxN называется матрица, все элементы которой равны нулю (пример 2.4). *Единичной* матрицей размера NxN называется квадратная матрица, диагональные элементы которой равны 1, а все остальные 0 (пример 2.5).

> ***Замечание***
> Единичную матрицу принято обозначать символом **I** или **E**.

Пример 2.4. Нулевые матрицы 3x3 и 2x4

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 2.5. Единичная матрица 5x5

$$I := \mathrm{identity}(5)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$