Неравенство Минковского

Как легко убедиться, введенное определение норм векторов $\mathbf{R_n}$ удовлетворяет трем требованиям, предъявляемым к нормам, которые были перечислены в начале предыдущего подраздела. Остановимся на втором из них, сформулировав его для евклидовой нормы (длины вектора):

$|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \le |\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|$,

что эквивалентно соотношению для координат векторов:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i + y_i\right)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Приведенное неравенство называют *неравенством Минковского*. Проверка этого неравенства для конкретного примера векторов из прошлого примера приведено в примере 1.5.

Пример 1.5. Проверка неравенства Минковского (продолжение примера 1.4)

$|a + b| = 21.095$ $\qquad |a| + |b| = 21.446$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(a_i + b_i\right)^2} = 21.095 \qquad \sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(a_i\right)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(b_i\right)^2} = 21.446$$

Неравенство Коши-Буняковского

Для произвольных векторов справедливо еще одно важное соотношение, называемое *неравенством Коши-Буняковского* (или просто *неравенством Буняковского*).

$|(\mathbf{x},\mathbf{y})| \le |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$,

или в эквивалентном виде для координат:

$$\left|\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i \cdot y_i\right)}\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

> ***Примечание***
>
> Будучи записанным только через скалярные произведения $(\mathbf{x},\mathbf{y})$, $(\mathbf{x},\mathbf{x})$ и $(\mathbf{y},\mathbf{y})$, неравенство Коши-Буняковского выполняется для любых Евклидовых пространств, не обязательно пространства векторов $\mathbf{R_n}$. В частности, его можно использовать для оценки интегралов от некоторых функций, множество которых, как можно доказать, также является линейным пространством.

В примере 1.6 проверяется справедливость неравенства Коши-Буняковского для тех же самых векторов, что были использованы в примерах 1.3 – 1.5.

Пример 1.6. Проверка неравенства Буняковского (продолжение примера 1.4)

$a \cdot b = 80$ $\qquad |a| \cdot |b| = 87.464$

$$\left|\sum_{i=1}^{5}\left(a_i \cdot b_i\right)\right| = 80 \qquad \sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(a_i\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(b_i\right)^2} = 87.464$$