Норма вектора

В произвольном линейном пространстве каждому его элементу $\mathbf{x}$ может быть поставлена в соответствие скалярная величина $\|\mathbf{x}\|$, называемая его *нормой*. Для того, чтобы число $\|\mathbf{x}\|$ можно было считать нормой, закон его вычисления должен быть таким, чтобы для любых элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ этого пространства выполнялись следующие три соотношения:

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, причем равенство нормы нулю $\|\mathbf{x}\|=0$ выполняется только для нуль-вектора $\mathbf{x}=\mathbf{0}$;
- $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$;
- $\|\alpha \cdot \mathbf{x}\|=\alpha \cdot \|\mathbf{x}\|$.

Пространства, в которых определена норма называют *нормированными*.

Легко догадаться, зачем нужны нормы. Самое главное их назначение – получить возможность сравнения векторов между собой. Если для обычных действительных чисел такая операция подразумевается, то для элементов линейных пространств ее надо специально конструировать. В частности, интуитивно понятно, что, скажем, вектор $(100,100,100)$ «больше» вектора $(1,1,1)$, но, чтобы иметь право на такое заявление, необходимо придумать саму технологию «сравнения» векторов. Эту функцию, как раз, и выполняет норма. Если норма одного из векторов больше нормы другого (а нормы являются обычными числами, которые допускают процедуру сравнения), то можно этот результат перенести и на сами векторы, считая, что первый «больше» второго.

Введем конкретные виды норм для пространства векторов $\mathbf{R_n}$, учитывая, что на практике (в зависимости от специфики той или иной задачи) применяются разные нормы.

- *Евклидовой нормой*, или *2-нормой*, или *длиной* вектора называется число:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \,.$$

- *1-нормой*, или «манхэттенским расстоянием» называется число:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}$$

- *∞-нормой* называется максимальное из абсолютных значений координат вектора:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i \left(|x_i|\right)$$

Наиболее часто в линейной алгебре используется евклидова норма, поскольку она имеет наиболее интуитивный геометрический смысл длины вектора. Ее мы будем в дальнейшем обозначать просто $\|\mathbf{x}\|$ (без индекса «2») или $|\mathbf{x}|$. 1-норму (вместо евклидовой) удобно применять в различных задачах вычислительной линейной алгебры, связанных с операциями над векторами большой размерности n (например, при решении большой системы линейных алгебраических уравнений). Делается это ради экономии компьютерного времени, поскольку каждое вычисление 2-нормы сопряжено с n возведениями в квадрат и извлечением корня. Как правило, различные численные алгоритмы подразумевают постоянный контроль нормы тех или иных векторов (например, невязок при итерационном решении системы уравнений), поэтому упрощение расчетов по формулам 1-нормы существенно сокращает время вычислений на ЭВМ. В некоторых специфических задачах применяется также ∞-норма.

В приведенном ниже примере вычисляются различные нормы двух векторов из пространства $\mathbf{R}_5$.

Пример 1.4. Нормы

$$a := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$|a| = 5.477 \qquad |b| = 15.969$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{5} (a_i)^2} = 5.477 \qquad \sqrt{\sum_{i=1}^{5} (b_i)^2} = 15.969$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{5} |a_i|} = 3.162 \qquad \sqrt{\sum_{i=1}^{5} |b_i|} = 5.916$$

$$\max(a) = 4 \qquad \max(b) = 9$$

Комментарии к примеру

Длина вектора (евклидова норма) рассчитывается в Mathcad автоматически (для этого, как показано во второй строке листинга, следует примерить к вектору операцию модуля). В третьей строке листинга вычисление евклидовой нормы векторов дублируется в соответствии с самим определением евклидовой нормы. Обратите также внимание, что расчет ∞-нормы, приведенный в последней строке листинга, будет верным только для положительных координат векторов. Если вектор содержит и отрицательные координаты, то правильным был бы расчет по формуле $\max(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$.