Скалярное произведение

В предыдущем разделе были введены основные математические действия над векторами: сложение (вычитание) векторов и их умножение на скалярную величину. Определим еще одно, исключительно важное, действие над двумя векторами, которое называется *скалярным произведением*.

Скалярное произведение

Скалярным произведением двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в действительном пространстве $\mathbf{R_n}$ называется действительное число $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n)$. Мы будем обозначать скалярное произведение двумя эквивалентными записями: $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Как несложно убедиться, определенное таким образом скалярное произведение обладает следующими тремя важными свойствами:

- $(\mathbf{x},\mathbf{x}) \geq 0$, причем $(\mathbf{x},\mathbf{x})=0$ тогда, и только тогда, если $\mathbf{x}=\mathbf{0}$;
- $(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{y},\mathbf{x})$;
- $(\alpha\cdot\mathbf{x}+\beta\cdot\mathbf{y},\mathbf{z}) = \alpha\cdot(\mathbf{x},\mathbf{z})+\beta\cdot(\mathbf{y},\mathbf{z})$.

В примере 1.3 вычисляется скалярное произведение двух векторов из $\mathbf{R_5}$. (в первой строке листинга задаются сами векторы, во второй производится расчет скалярного произведения при помощи встроенного оператора Mathcad, а в последней этот расчет дублируется согласно определению скалярного произведения).

Пример 1.3. Скалярное произведение векторов

$$a := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$a \cdot b = 80$$

$$\sum_{i=1}^{5} a_i \cdot b_i = 80$$

Евклидовы пространства

Следуя формализму, принятому в математике, нельзя не упомянуть, что линейные пространства, в которых определена процедура скалярного произведения элементов, удовлетворяющая трем перечисленным в предыдущем подразделе свойствам, называются *Евклидовыми пространствами*. В частности, пространство векторов $\mathbf{R_n}$ с введенными выше формулами скалярного произведения, является Евклидовым пространством.

Не вдаваясь глубоко в математические аспекты проблемы, заметим, что приведенное определение скалярного произведения векторов вовсе не является единственно возможным. Можно сконструировать другие формулы для скалярного произведения, которые будут удовлетворять трем указанным свойствам, и, соответственно, будут вводить пространство векторов в класс Евклидовых пространств. Однако, представленный вид скалярного произведения векторов, во-первых, очень простой и интуитивный, и, во-вторых, допускает наглядную геометрическую интерпретацию.

Подчеркнем, что многие из теорем линейной алгебры формулируются для элементов Евклидовых пространств любой природы (не обязательно $\mathbf{R_n}$), поэтому применять их можно, в том числе, и к рассматриваемому пространству векторов. Мы будем почти всегда иметь дело с действительным линейным пространством $\mathbf{R_n}$ (за редким исключением, когда будем касаться комплексного линейного пространства), и поэтому станем говорить о свойствах Евклидовых применительно к $\mathbf{R_n}$.

Скалярное произведение векторов: геометрия

Если подходить с точки зрения геометрии, то скалярным произведением $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ можно назвать скаляр, равный $|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos(\alpha)$, где α представляет собой угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

> ***Замечание***
>
> Как следует из элементарной геометрии, два неколлинеарных вектора в пространстве (т.е. две непараллельные прямые) определяют некоторую плоскость. Один (меньший) угол, образованный этими прямыми и называют углом между векторами. Если векторы коллинеарны, то угол между ними равен нулю.