

Пример: стационарная гидродинамика

Рассмотрим еще одну задачу на собственные значения для ОДУ, также отталкиваясь от более общих уравнений в частных производных. А

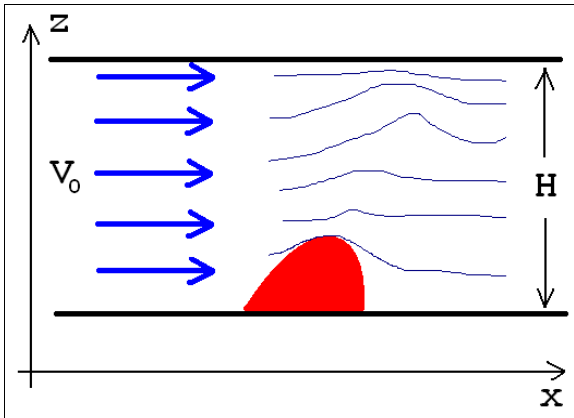


Рис. 9. Гидродинамическая модель (15)

именно, будем исследовать возникновение волн при обтекании препятствия (рис. 9). Задачу можно интерпретировать как модель подветренных волн, появляющихся при набегании в атмосфере потока воздуха на гору, либо

как возникновение волн в канале с препятствием.

В качестве модели подветренных волн может использоваться система уравнений гидродинамики в приближении Буссинеска, сводящаяся к одному уравнению в частных производных для вертикальной компоненты скорости $V(x,z,t)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) + \omega^2 \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \quad (14)$$

Параметр ω имеет размерность частоты и называется *частотой плавучести* (или *частотой Вейселя-Брента*), задавая масштаб колебаний частиц текучей среды, контролируемых силой тяжести. Для Земной атмосферы частота плавучести составляет $\omega \approx 0.01$ Гц и, вообще говоря, меняется с высотой, т.е. является не константой, а функцией $\omega(z)$.

Для решения задачи (14), как и для любого уравнения в частных производных, следует должным образом задать начальные и граничные условия, которые, в частности, будут учитывать рельеф поверхности $h(x)$, значение V_0 и характер решения на

верхней границе. Однако, нас сейчас интересуют задачи на собственные значения для ОДУ, и поэтому мы упростим модель, чтобы свести ее к этому классу уравнений.

Во-первых, будем считать, что препятствие отсутствует, т.е. профиль $h(x)=0$. Во-вторых, рассмотрим течение жидкости или газа в канале с твердыми стенками. Эти два соображения сразу определяют граничные условия, которые выражают эффект «прилипания» жидкости к стенкам канала:

$$V(z=0)=V(z=H)=0. \quad (15)$$

В-третьих, будем рассматривать установившееся обтекание, зависящее от времени только благодаря смещению волновой картины вправо, вместе с основным потоком. Это позволяет заменить производную по времени производной по горизонтальной координате: $\partial/\partial t=V_0 \cdot \partial/\partial x$. Наконец, в-четвертых, будем искать решение в виде

$$V(x,z)=V(z) \cdot \exp(ikx), \quad (16)$$

т.е. в зависимости только от одной координаты z .

В итоге, уравнение в частных производных (14) сводится к ОДУ:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\omega^2(z)}{V_0^2} - k^2 \right) \cdot V(z) = 0. \quad (17)$$

Здесь параметр задачи k является искомым собственным значением, одновременно определяя соотношение (16) между масштабом вертикальной и горизонтальной длиной волны.

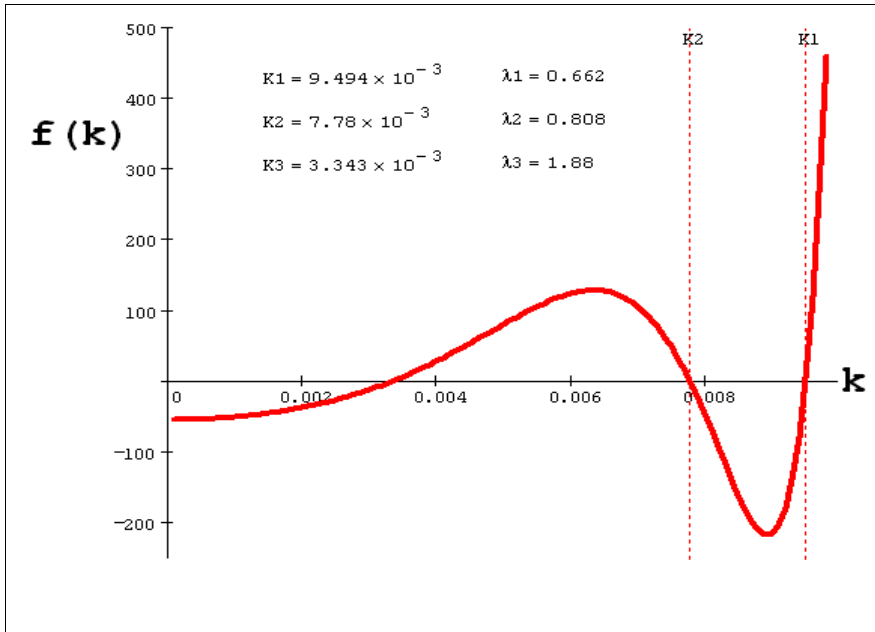


Рис. 10. Функция невязки $f(k, H)$ для правого граничного условия (15)

Перейдем, собственно, к численному решению задачи методом пристрелки, для чего выберем некоторое значение $H=1$ км и станем решать пробные задачи Коши, исследуя, подобно (12) невязку выполнения краевого условия на правой границе. Наше уравнение, опять-таки, однородно, поэтому пристрелку достаточно проводить по одному параметру k . Функция невязки для правого граничного условия, которую мы сделали зависящей еще от одного параметра – высоты канала H , показана на рис. 10.

Соответствующие собственные функции, которые, по результатам пристрелки, вычислены методом Рунге-Кутты, показаны на рис. 11. Обратите внимание, что вертикальная координата z отложена на графике по оси ординат.

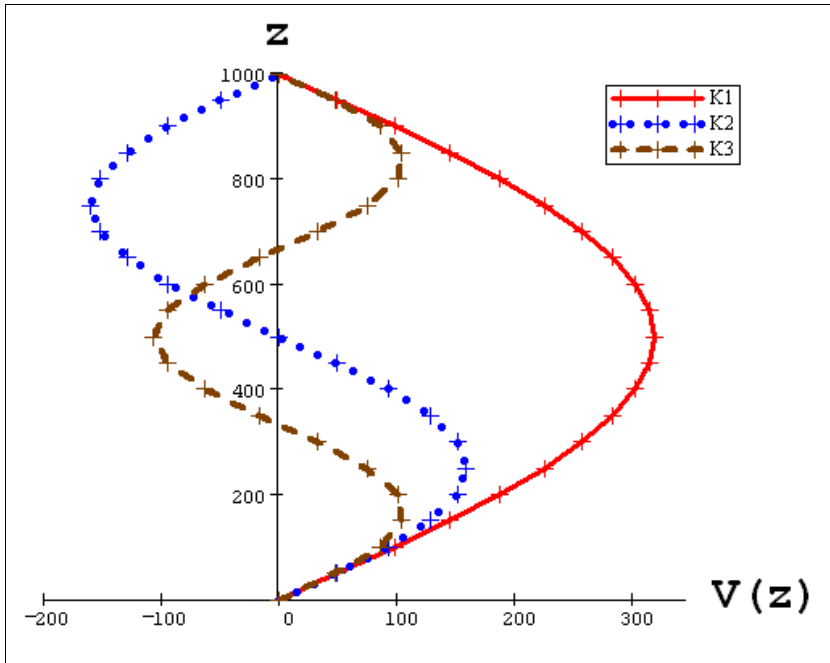


Рис. 11. Собственные функции задачи (17)

Несложно заметить, что (17), вкупе с граничными условиями (15), имеет тот же вид, что и рассмотренное нами ранее волновое уравнение (9), если $\omega(z)=\omega=\text{const}$. Поэтому очевидно, что аналитическое выражение для искомых собственных значений заранее известно и определяется как:

$$\sqrt{\frac{\omega^2}{V_0^2} - k^2} = \frac{N \cdot \pi}{H} . \quad (18)$$

Важным отличием является тот факт, что условие (18) может быть выполнено, только, если под знаком корня в нем стоит положительное выражение. Иными словами, собственных значений нет (т.е. возникновение волн невозможно), если

$$Ri_0 \equiv \frac{\omega^2 H^2}{V_0^2} < \pi^2 . \quad (19)$$

Параметр Ri_0 называется в гидродинамике *числом Ричардсона*.

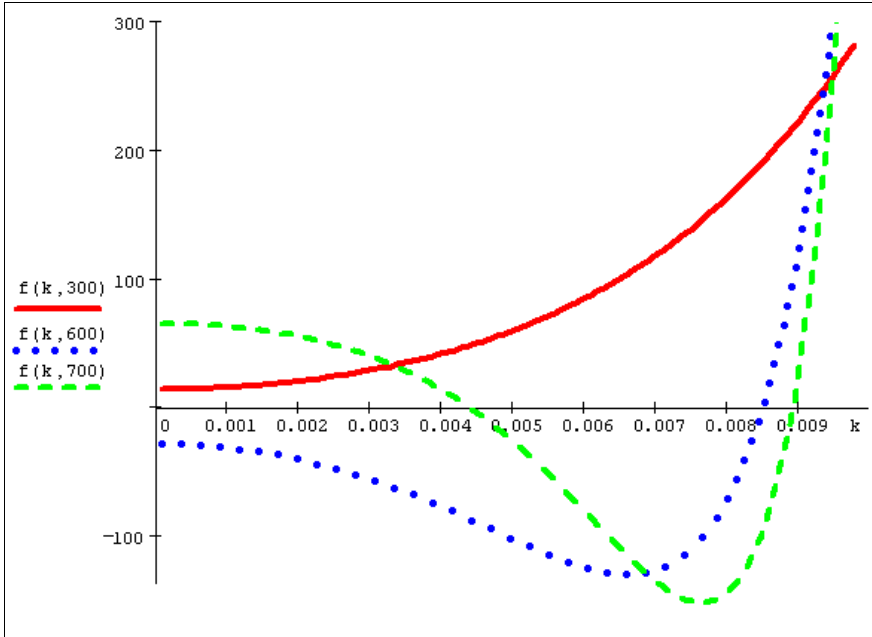


Рис. 12. Невязка правого граничного условия $f(k, H)$ для разных H

Убедиться в отсутствии собственных значений можно, анализируя функцию невязки $f(k, H)$ для разных значений H (рис 12). Видно, что для малых H , удовлетворяющих (19), например, $H=300$, она не имеет ни одного корня, т.е. собственных значений у исходной задачи нет. По мере увеличения H появляется сначала один корень ($H=600$), потом два корня ($H=700$) и т.д.

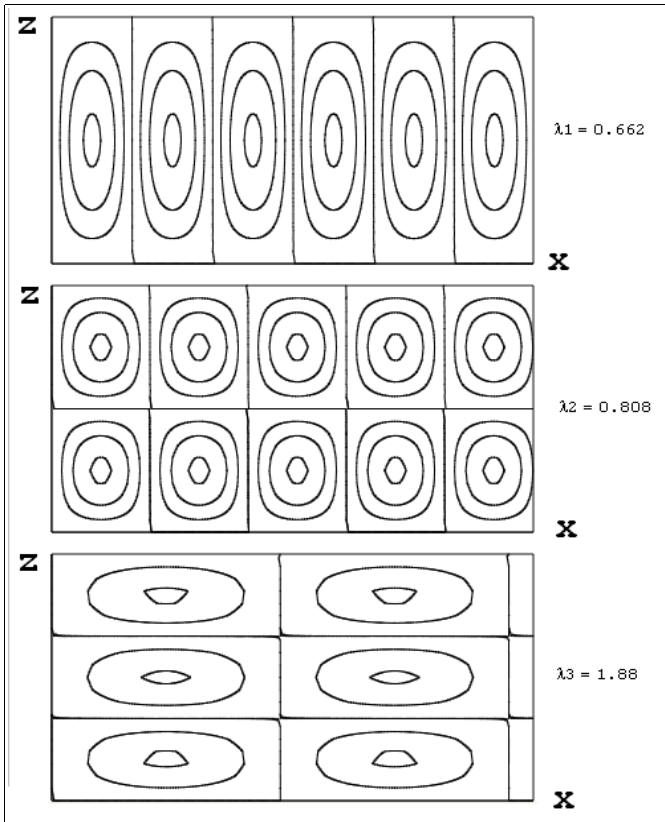


Рис. 13. Собственные колебания двумерной задачи

Ситуация, показанная на рис. 10, при $N=1000$, отвечает наличию трех собственных значений, т.е. колебаний с горизонтальной длиной волны примерно 0.7, 0.8 и 1.9 км. Сами собственные функции для двумерной задачи, вычисленные согласно (16), показаны в виде линий уровня на рис. 13.