§11. Линейная редукция

Завершим разговор о линейных обратных задачах представлением еще одного подхода, называемого *редукцией*. По сути, он очень близок к регуляризации (в некоторых вариантах повторяя ее результаты). Особенность редукции заключается в детальном учете свойств как матрицы **A**, так и шума **σ**, например, таких, как дисперсия шума.

Напомним, что мы рассматриваем линейную модель измерений:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}+\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{b}. \tag{81}$$

Обратную задачу восстановления **y** можно сформулировать так – отыскать преобразование **R** системы (81)

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{b}, \tag{82}$$

результатом которого была бы наилучшая (в некотором смысле) оценка **y**:

$$\mathbf{y}\approx\mathbf{R}\cdot\mathbf{b}. \tag{83}$$

Напомним, что (81) мы интерпретировали как измерение неизвестного вектора **y** на приборе **A**, показания которого представляются вектором **b**. Развивая эту точку зрения, преобразование (82) можно считать показаниями другого, улучшенного, прибора, состоящего из связки «прибор **A** + компьютер». Конечно, мы ожидаем, что показания этого прибора **R·b** будут ближе к искомому сигналу **y**. Это так называемая *редукция к идеальному прибору*, для которой произведение **R·A** представляет собой единичную матрицу **I**.

В случае достаточно низкого уровня шума оправдан поиск такой матрицы преобразования **R**, которая даёт несмещённую оценку вектора **y**. Соответствующая задача подразумевает одновременное выполнение равенства

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{I} \tag{84}$$

и минимизацию уровня шумовой компоненты:

$$|\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\sigma}|^2 \sim \min. \qquad (85)$$

Можно показать, что сформулированная задача (84-85) имеет решение:

$$\mathbf{R}=(\mathbf{A}^\mathbf{T}\cdot\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{A}^\mathbf{T}. \qquad (86)$$

Если известна оценка уровня шума $\boldsymbol{\sigma}$, т.е. среднеквадратичное отклонение, которое мы обозначим тем же (скалярным) символом σ, то дисперсия уровня шума прибора $\mathbf{R}\cdot\mathbf{A}$ будет равна:

$$h=|\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\sigma}|^2 \sim \sigma^2\cdot \mathrm{tr}(\mathbf{A}^\mathbf{T}\cdot\mathbf{A})^{-1}. \qquad (87)$$

Несложно убедиться в эквивалентности задачи (84-85) задаче поиска псевдорешения. В частности, возвращаясь к примеру о грушах и яблоках со СЛАУ (29), определяемой следующими параметрами:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix}51\\ 109\\ 172\end{pmatrix}, \qquad (88)$$

формула (86) приводит к матрице **R** следующего вида:

$$R=\begin{pmatrix}-1.333 & -0.333 & 0.667\\ 1.083 & 0.333 & -0.417\end{pmatrix} \qquad (89)$$

и, соответственно, оценке вектора **y**

$$R\cdot b=\begin{pmatrix}10.333\\ 19.917\end{pmatrix}, \qquad (90)$$

которая совпадает с псевдорешением (см. §4).

Задачи редукции ставятся по-разному, в зависимости от наличия априорной информации о сигнале и шуме. Чем больше такой информации, тем более удачное преобразование **R** удается построить. Например, если имеется оценка уровня шума σ, то задачу редукции к идеальному прибору можно поставить в форме поиска смещенной оценки вектора **y**. В этом случае вместо точного равенства $\mathbf{R{\cdot}A}=\mathbf{I}$ ставится условие максимальной близости $\mathbf{R{\cdot}A}$ к $\mathbf{I}$:

$$|\mathbf{R{\cdot}A} - \mathbf{I}| \sim \min. \qquad (91)$$

при заданном ограничении на уровень шума ε:

$$h=|\mathbf{R{\cdot}\boldsymbol{\sigma}}|^2 < \varepsilon. \qquad (92)$$

Ценой минимального смещения искомой оценки можно добиться значительного подавления шума. Решение задачи редукции (91-92) имеет вид:

$$\mathbf{R}(\lambda)=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,(\mathbf{A{\cdot}A}^{\mathrm{T}}+\lambda{\cdot}\sigma^2{\cdot}\mathbf{I}\,)^{-1}, \qquad (93)$$

где $\lambda(\varepsilon)$ – параметр, зависящий от желаемого уровня шума ε.

Редукция (93) задачи (88) (в предположении $\sigma=1$) даст компоненты вектора $\mathbf{y}(\lambda)$, показанные на рис. 36. Пунктиром отложены соответствующие элементы вектора квазирешения (90), т.е. результата несмещенной редукции к идеальному прибору с минимальным уровнем шума.

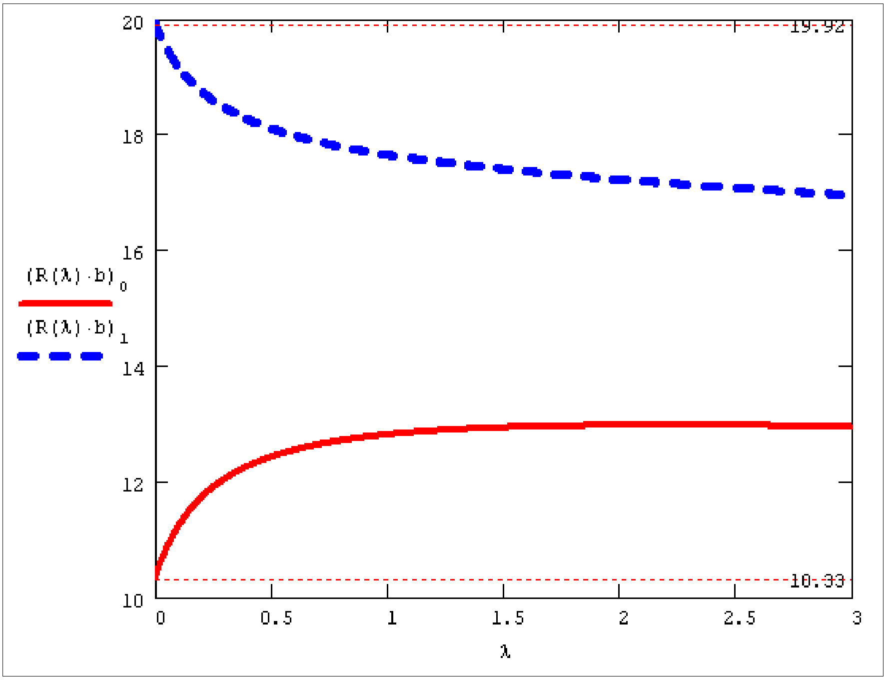

Рис. 36. *Решение задачи редукции с ограничением на уровень шума*

Для смещения (невязки СЛАУ) g(λ) и уровня шума h(λ) в задаче редукции с ограничением на уровень шума получаются следующие оценки:

$$g(\lambda)=\lambda^2\cdot\sigma^4\cdot\mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A}+\lambda\cdot\sigma^2\cdot\mathbf{I})^{-2}, \tag{92}$$

$$h(\lambda)=\sigma^2\cdot\mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^T+\lambda\cdot\sigma^2\cdot\mathbf{I})^{-2}\cdot\mathbf{A}. \tag{93}$$

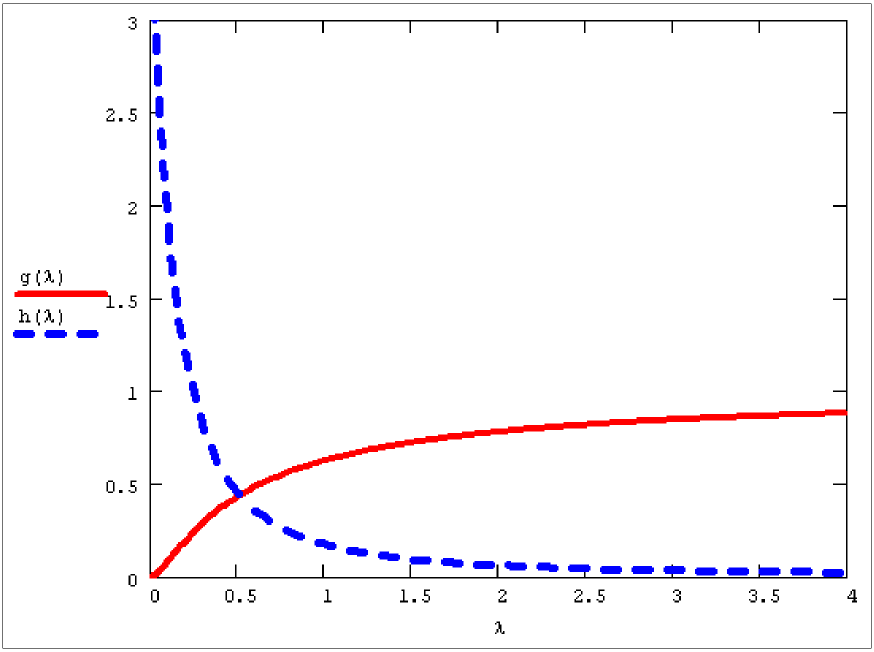

Рис. 37. *Уровень шума и невязка для смещенного решения задачи (88)*

Соответствующие расчетные кривые для задачи (88) показаны на рис. 37. График уровня шума h(λ) комплекса «прибор + компьютер» задает способ определения параметра λ(ε). Следует отложить по оси ординат значение ε, что даст искомое λ в качестве абсциссы кривой h(λ). Попросту говоря, λ – это единственный корень уравнения:

$$h(\lambda) = \varepsilon. \qquad (94)$$

График параметрической зависимости невязки g(λ) от уровня шума h(λ) называют *оперативной характеристикой* комплекса «прибор+компьютер» (рис. 38). Как несложно догадаться, правая точка этой кривой отвечает случаю λ=0, т.е. несмещенной оценке g(λ)=0, уровень шума которой определяется выражением (86). Действительно, небольшое смещение влево от этой точки даст некоторое смещение оценки, но, в то же время, существенно снизит ожидаемый уровень шума.

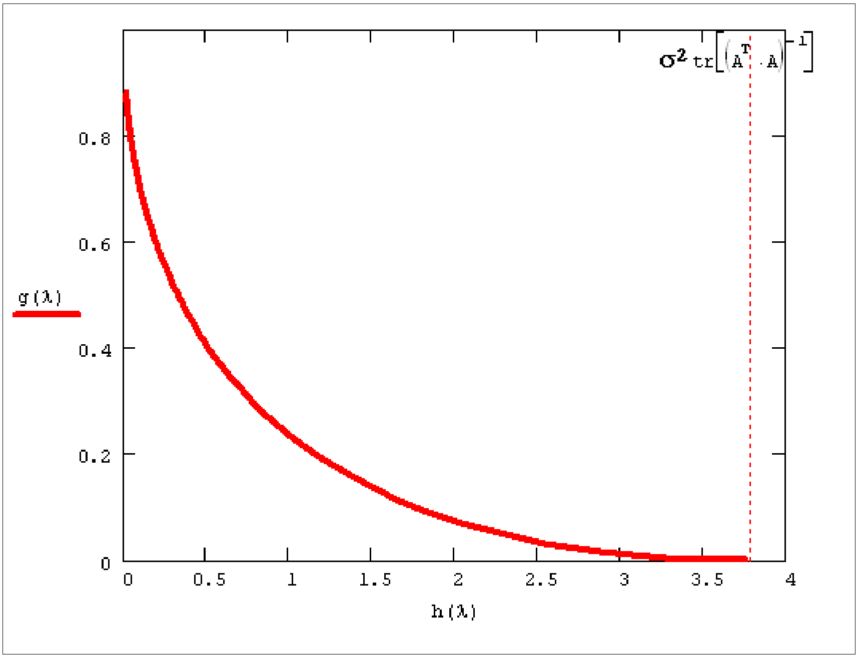

Рис. 38. *Оперативная характеристика прибора* ***RA***

В заключение заметим, что решение задачи редукции с ограничением на уровень шума, несмотря на схожесть с концепцией регуляризации, все-таки заметно от нее отличается идеологически. Приглядевшись к формулам (91-93), несложно осознать, что изложенная постановка задачи редукции не требует никакой дополнительной информации о сигнале **y**. Единственной использованной априорной информацией были сведения об интенсивности шума исходных измерений σ.

Мы остановились всего на двух, наиболее простых, задачах линейной редукции. В то же время, другие задачи редукции позволяют учитывать самую разную априорную информацию, не только о самом сигнале, но и о приборе **A** или шуме **σ**, в частности, данные о матрице корреляции шума. Таким образом, исследователь имеет возможность гибко выбирать желаемый алгоритм редукции, в зависимости от характера постановки конкретного эксперимента.