§6. Вырожденные и плохо обусловленные СЛАУ

Рассмотрим теперь два типа СЛАУ (27) с квадратной матрицей **A** размера MxM:

- вырожденная система (с нулевым определителем |**A**|=0);
- плохо обусловленная система (определитель **A** не равен нулю, но число обусловленности очень велико).

Несмотря на то, что эти типы систем уравнений существенно отличаются друг от друга (для первого решение отсутствует, а для второго существует и единственно), с практической точки зрения вычислителя, между ними много общего.

Вырожденная система – это система, описываемая матрицей с нулевым определителем |**A**|=0 (*сингулярной* матрицей). Поскольку некоторые уравнения, входящие в такую систему, представляются линейной комбинацией других уравнений, то, фактически, сама система является недоопределенной. Несложно сообразить, что, в зависимости от конкретного вида вектора правой части **b**, существует либо бесконечное множество решений, либо не существует ни одного.

Рассмотрим первый случай, когда СЛАУ **A·x**=**b** с сингулярной квадратной матрицей **A** не имеет ни одного решения. Этот вариант сводится к построению нормального псевдорешения (т.е. выбору из бесконечного множества решений такого, которое наиболее близко к определенному, например, нулевому, вектору).

Приведем пример такой задачи (для системы двух уравнений)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.05 & 2.1 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix} \quad . \qquad (37)$$

СЛАУ (37) проиллюстрирована рис. 19, который показывает, что два уравнения, задающие систему, определяют на плоскости (x_1, x_2) две параллельные прямые. Прямые не пересекаются ни в одной точке координатной плоскости, и решения системы, соответственно, не существует.

Заметим, что СЛАУ, заданная несингулярной квадратной матрицей размера 2x2, определяет на плоскости пару пересекающихся прямых (см. рис. 21-22 ниже). Также стоит сказать, что, если бы система была совместной, то геометрическим изображением уравнений были бы две совпадающие прямые, описывающие бесконечное число решений.

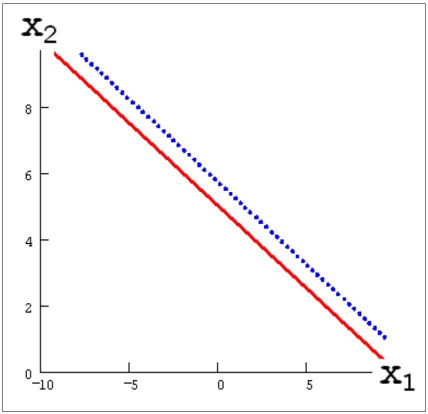

Рис. 19. *Графическое представление несовместной СЛАУ*

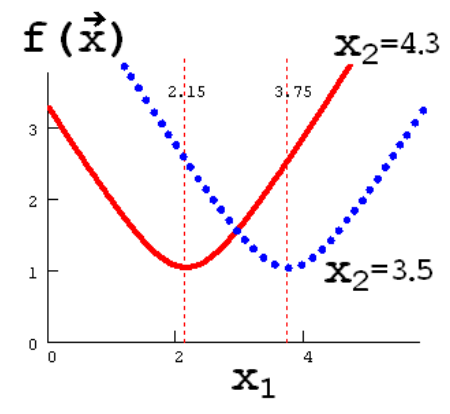

Рис. 20. *График сечений невязки* $f(\mathbf{x})=|\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{b}|$ *в зависимости от* x_1

Несложно догадаться, что в рассматриваемом сингулярном случае псевдорешений системы (37), минимизирующих невязку $|\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{b}|$, будет бесконечно много, и лежать они будут на третьей прямой, параллельной двум показанным на рис. 19 и расположенной посередине между ними. Это иллюстрирует рис. 20, на котором представлено несколько сечений функции невязки $f(x)=|\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{b}|$, которые говорят о наличии семейства минимумов одинаковой глубины.

Для определения единственного решения следует выбрать из всего множества псевдорешений то, которое обладает наименьшей нормой. Таким образом, в сингулярном случае для получения выделенного решения надо численно решить многомерную задачу минимизации. Однако, как мы увидим в дальнейшем, более эффективным способом будет использование регуляризации или ортогональных матричных разложений (см. §7 и 10 соответственно).

Обратимся теперь к плохо обусловленным системам, т.е. СЛАУ с матрицей **A**, у которой определитель не равен нулю, но число обусловленности $|\mathbf{A}^{-1}|\cdot|\mathbf{A}|$ велико. Несмотря на то, что плохо обусловленные системы имеют единственное решение, на практике искать это решение чаще всего не имеет смысла.

Рассмотрим свойства плохо обусловленных СЛАУ на двух конкретных примерах очень близких плохо обусловленных СЛАУ с одинаковой правой частью **b** и мало отличающимися матрицами **A** и **B**:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6.01\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}1 & 2.01\\ 3 & 6\end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}. \tag{38}$$

Несмотря на близость этих систем, их точные решения оказываются очень далекими друг от друга, а именно:

$$y_A=\begin{pmatrix}803\\ -400\end{pmatrix}, \quad y_B=\begin{pmatrix}-265\\ 133.33\end{pmatrix} \tag{39}$$

Если вспомнить о наличии шума, т.е. о всегда присутствующей погрешности входных данных, то становится ясным, что решать плохо обусловленные системы стандартными методами не имеет вовсе никакого смысла. Напомним, что задачи, для которых малые ошибки модели (матрицы **A** и вектора **b**) приводят к большим ошибкам решения, называются некорректными. Таким образом, плохо обусловленные СЛАУ являются типичным примером некорректных задач.

Кроме того, следует отметить, что для системы двух уравнений точное решение получить легко, однако при решении СЛАУ большой размерности (в том числе и «точным» алгоритмом

Гаусса) даже незначительные ошибки округления, неминуемо накапливаемые при расчетах, приводят к огромным погрешностям результата. Возникает вопрос: имеет ли смысл искать численное решение, если заранее известно, что, в силу неустойчивости самой задачи, оно может оказаться совершенно неправильным?

Чтобы еще лучше понять причину некорректности, полезно сравнить графическую интерпретацию хорошо (рис. 21) и плохо (рис. 22) обусловленной системы двух уравнений. Решение системы визуализируется точкой пересечения двух прямых линий, изображающих каждое из уравнений.

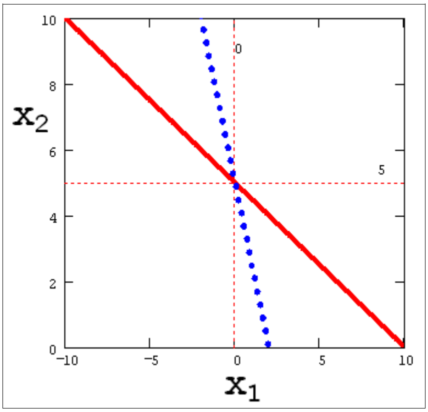

Рис. 21. *График хорошо обусловленной СЛАУ*

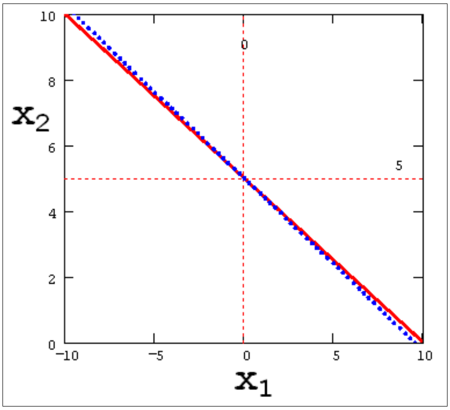

Рис. 22. *График плохо обусловленной СЛАУ*

Из рис. 22 видно, что прямые, соответствующие плохо обусловленной СЛАУ, располагаются в непосредственной близости друг от друга (почти параллельны). В связи с этим, малые ошибки в расположении каждой из прямых могут привести к значительным погрешностям локализации точки их пересечения (решения СЛАУ) в противоположность случаю хорошо обусловленной системы, когда малые погрешности в наклоне прямых мало повлияют на место точки их пересечения (рис. 21).

Отметим, что плохая обусловленность матрицы типична и при реконструкции экспериментальных данных, задаваемых переопределенными (несовместными) СЛАУ (например, в задачах томографии).

Для решения некорректных задач, в частности, вырожденных и плохо обусловленных СЛАУ, разработан очень эффективный метод, называемый *регуляризацией*. В его основе лежит учет дополнительной априорной информации о структуре решения, которая очень часто имеется в практических случаях.